

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

**FIABILITÉ DES STRUCTURES DE TREILLIS:
DIMENSIONNEMENT DES ÉLÉMENTS PORTEURS
PAR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION PROBABILISTE**

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR

KENNET GASTON

AVRIL 2021



Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans [Depositum](#), site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous. L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre.

Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) obtained the permission of the author to use a copy of this document for nonprofit purposes in order to put it in the open archives [Depositum](#), which is free and accessible to all. The author retains ownership of the copyright on this document.

REMERCIEMENTS

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire sont réalisés grâce à l'encadrement depuis le premier jour du professeur Walid Ghie, ing. Ph. D., qui m'a guidé avec ses conseils, son enseignement, sa versatilité : ingénierie civile, structure et mécanique; mais aussi sa disponibilité permanente et pour nos cordiales et enrichissantes discussions.

J'exprime ma reconnaissance envers le professeur Guyh Dituba Ngoma, ing., Ph. D., président du jury et le professeur Hatem Mrad, ing., PH. D., membre du jury, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs conseils.

Merci aussi à M. Sylvain Bergeron, directeur produit industriel, Ingénierie des infrastructures – est du Canada Infrastructure SNC-Lavalin pour sa confiance et la conciliation travail étude qu'il a rendue possible.

Je dédie ce travail à mes parents et ma famille.

RÉSUMÉ

La conception des structures doit répondre à un parfait équilibre entre la sécurité du public et le coût de l'ouvrage. La méthode déterministe choisie empiriquement des facteurs de sécurité, mais avec un souci conservatisme produisant des ouvrages souvent fiables, mais sans permettre d'avoir une idée précise de leur fiabilité.

Ce travail de recherche porte sur le dimensionnement des éléments de structure de treillis selon la méthode probabiliste qui fournit une quantification de cette fiabilité.

La technique utilisée crée d'abord le modèle par la Méthode des Éléments Finis (MEF) qui fournit l'expression de la réponse de la structure par rapport aux charges et aux propriétés des matériaux. Par la suite, en utilisant la méthode de la transformation probabiliste des variables aléatoires, sont évaluées les Fonctions de Densité de Probabilité (PDF) exactes des expressions de la résistance et de la sollicitation.

La probabilité de défaillance est l'intégrale de la PDF sur un intervalle allant de la réponse du MEF jusqu'à l'infinie. Une simulation sur un millier de données qui, ici, suivent la loi normale permet de résoudre les équations et déterminer la fiabilité de la structure.

Les décisions de dimensionnement sont prises à la lumière des résultats analysés pour chaque configuration en fonction de la probabilité obtenue versus le critère demandé.

La méthode est généralisée par son application à un pont en étudiant la fiabilité des barres du treillis porteur du tablier.

Mots clés : Fiabilité des structures, méthode probabiliste, méthode déterministe, méthode par éléments finis, transformation isoprobabiliste.

ABSTRACT

Structural design must fit a perfect harmony between public safety and the cost of the work. The deterministic method empirically chooses safety factors, but with a concern for conservatism, often producing reliable works, but without giving a precise idea of their reliability.

This research work concerns the dimensioning of truss elements according to the probabilistic method which provides the quantification of this reliability.

The technique used first creates the model by the Finite Element Method (FEM) which provides the expression of the response of the structure with respect to loads and material properties. Subsequently, using the method of the probabilistic transformation of random variables, the exact Probability Density Functions (PDF) of the expressions for resistance and stress are evaluated.

The probability of failure is the integral of the PDF over an interval from the response of the MEF to infinity. A simulation of a thousand data which, here, follow the normal

standard distribution makes it possible to solve the equations and determine the reliability of the structure.

Sizing decisions are made basing on the results analyzed for each configuration as a function of the probability obtained versus the criterion requested.

The method is generalized by the application of a bridge by studying the reliability of the bars of the supporting truss of the deck.

Keywords: Reliability of structures, probabilistic method, deterministic method, finite element method, isoprobabilistic transformation.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. Introduction Générale	1
1.1 Contexte	1
1.2 Méthode déterministe versus méthode probabiliste	3
1.3 Treillis à trois barres : Méthode des éléments finis.....	4
1.4 Problématique soulevée par ce mémoire	18
1.5 Objectifs du mémoire.....	19
1.5.1 Objectif général.....	19
1.5.2 Objectifs spécifiques	19
1.6 Méthodologie préconisée par ce mémoire.....	20
Chapitre 2. Introduction à la fiabilité des structures.....	22
2.1 Historique de la méthode probabiliste	22
2.2 Historique de développement des méthodes de conception de structure	24
2.2.1 Méthodes des contraintes admissibles	25
2.2.2 Méthodes de facteur de sécurité globales	26
2.2.3 Méthodes de calcul aux états limites	27
2.3 Revue de quelques résultats de recherches en fiabilité	27
2.3.1 Recherches pour compenser les limites de la méthode déterministe	28
2.3.2 Recherches avec la méthode probabiliste	30
2.4 Progrès récents dans l'analyse de fiabilité et position de la recherche à nos jours	32
2.5 Modèles de Fiabilité hybride.....	35
2.5.1 Fiabilité des structures superposant plus de deux paramètres aléatoires..	35
2.5.2 Couplage mécano-fiabiliste.....	37

2.5.3	Méthode de surface de réponse	37
2.6	Méthodes d'approximation	38
2.6.1	Méthode d'approximation FOSM: First Order Second Moment	38
2.6.2	Méthode d'approximation FORM: First Order Reliability Method	39
2.6.3	Méthode d'approximation SORM: Second Order Reliability Method.....	42
2.6.4	Simulation : Méthode Monté Carlo.....	42
Chapitre 3.	Fiabilité basée sur la résistance	45
3.1	Expression générale de fiabilité et de probabilité de défaillance	45
3.2	Fiabilité lorsque la distribution S et L suivent la loi normale	49
3.3	Représentation graphique de la distribution suivant la loi normale.....	51
3.4	Fonction de répartition versus la Table de la loi normale	56
3.5	Fiabilité pour les facteurs de sécurité de 95%, 5% et 0.5%.....	58
Chapitre 4.	Application des Méthodes déterministe et probabiliste	60
4.1	Application de la Méthode déterministe.....	60
4.1.1	Charges par la méthode déterministe : Treillis à trois bars (Voir §1.3)	61
4.1.2	Calcul des sollicitations.....	64
4.1.3	Calcul de la résistance selon la norme CSA S16-14.....	67
4.1.3.1.	Élancement maximal, art. 10.4.2.1	68
4.1.3.2.	Résistance à la compression seulement, art. 13.3.1, 13.3.2 et 13.3.3 ...	68
4.1.3.3.	Résistance à la stabilité	69
4.1.3.4.	Vérification de la flèche en service	71
4.2	Application de la Méthode probabiliste	73
4.2.1	L'expression du déplacement sans la force P.....	74

4.2.2	Génération de la force P aléatoire	74
4.2.3	Test de normalité des données.....	76
4.2.4	Analyse de la probabilité de défaillance.....	77
4.2.5	Indice de fiabilité	81
Chapitre 5.	Généralisation de la méthode et application de calcul sur un pont.....	83
5.1	Généralisation de la méthode avec le calcul d'un pont.....	83
5.1.1	Pont : Propriétés et expression du déplacement.....	83
5.1.2	Calcul de la fiabilité du pont	90
5.2	Application de calcul déterministe et fiabiliste des barres du pont.....	96
5.2.1	Résultat des calculs déterministes des barres constitutives du pont	96
5.2.2	Résultat des calculs probabilistes des barres constitutives du pont.....	104
Chapitre 6.	Conclusion et Recommandations	108
6.1	Accomplissement	108
6.2	Limites de la méthode proposée	108
6.3	Recommandations.....	109
Références	110

TABLE DES FIGURES

Figure 1 : Application proposée : treillis à trois barres	5
Figure 2 : Géométrie du problème : treillis 3 bars	6
Figure 3 : Déplacement du nœud 2	17
Figure 4 : Résumé des étapes.....	21
Figure 5 : Analyse non linéaire pour grand déplacement [10]	28
Figure 6 : Sections de poutres à double symétrie travaillant en partie en plasticité [11]	29
Figure 7 : Fiabilité corrosion de barres d'armatures	31
Figure 8 : Exemples d'organigrammes robustes pour le calcul de fiabilité [25, 26]	33
Figure 9 : Exemple de réseaux de neurones artificiels pour le calcul de fiabilité [27, 28]	34
Figure 10 : Courbe de l'indice de fiabilité Hasofer-Lind [29]	41
Figure 11 : Région d'intégration fiabilité et probabilité de rupture [29].....	47
Figure 12 : Probabilité de défaillance [31]	48
Figure 13 : Fonction de densité de probabilité de trois variables normales	52
Figure 14 : Interférence de la charge sur la résistance quand σ_x augmente	54
Figure 15 : Courbe des fonctions cumulatives de distribution	55
Figure 16 : Extrait de la table normale centrée réduite	57
Figure 17 : Capture du tracé de densité normal sur Matlab.....	58
Figure 18 : Facteur de sécurité significative en fiabilité [29]	59
Figure 19 : Génération des résultats des réactions d'appuis	66
Figure 20 : Calcul résistance à la stabilité CSA S16-09	70
Figure 21 : Flèche d'une poutre en porte-à-faux (CISC-ICCA).....	71
Figure 22 : Calculatrice d'acier de SAFI	73

Figure 23 : Fonction de densité de probabilité.....	75
Figure 24 : Test de Normalité	77
Figure 25 : Vue de fermes, du pont et de son treillis porteur	84
Figure 26 : Sections et connectivité du pont.....	85
Figure 27 : Charges retenues pour le calcul numérique	89
Figure 28 : Déplacement maximale du pont	90
Figure 29 : Génération de variables aléatoires, calcul: moyenne et écart type sur Mathcad	91
Figure 30 : Facteurs de sécurité	92
Figure 31 : Calcul de l'indice de fiabilité de la fonction d'état limite	93
Figure 32 : Indice de fiabilité en fonction du facteur de sécurité	94
Figure 33 : Probabilité de défaillance et fiabilité via l'expression intégrale	94
Figure 34 : Interférence des distributions de S et de L du pont	95
Figure 35 : Identification des nœuds et barres	99
Figure 36 : Déplacement des nœuds (unités en mm).....	100
Figure 37 : Efforts internes des barres	100
Figure 38 : Taux de sollicitation des barres selon la norme CSA S16	104
Figure 39 : Fiabilité des barres du treillis	107

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 1: Combinaisons des charges du Code national du bâtiment Canada (version 2015)	62
Tableau 2: Interprétation des coefficients	62
Tableau 3: Proposition d'application des combinaisons des charges selon le CNB 2015	63
Tableau 4: Cohérence des unités de résistance et de sollicitation	79
Tableau 5: Connectivités des barres	85
Tableau 6: Coordonnées des nœuds	86
Tableau 7: Coordonnées des nœuds sens horaire (unités en mm).....	98
Tableau 8: Connectivités des barres sens horaire.....	99
Tableau 9 : Réactions d'appuis et déplacement aux nœuds	101
Tableau 10: Efforts internes des barres.....	102

CHAPITRE 1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1 Contexte

Une structure doit être dimensionnée pour reprendre toutes les charges qui la sollicitent et les transférer au sol sans se déformer. Ce dimensionnement des éléments porteurs des structures doit répondre à un parfait équilibre entre la sécurité du public et le coût de l'ouvrage. Le coût constituant l'autre borne de cet intervalle.

Les codes réglementaires fixent les coefficients de sécurité et il incombe à l'ingénieur de choisir la section efficace pour que la structure ne dépasse pas les états limites. Dès les années 50, au Danemark, sera adopté le principe de facteur de sécurité partiel. C'est la méthode déterministe. Cette méthode choisie empiriquement des facteurs de sécurité, mais avec un souci conservatisme produisant des ouvrages souvent fiables, mais sans permettre d'avoir une idée précise de leur fiabilité.

Malgré le conservatisme de la méthode déterministe, occasionnellement des sinistres se produisent révélant une sous-estimation de facteur de sécurité ponctuelle. Et inversement, lorsque le niveau d'incertitude du problème est plus faible que prévue, les facteurs de sécurité amènent à un surdimensionnement des membrures. Une approche plus rationnelle est venue pallier les défauts de la méthode déterministe, c'est la méthode probabiliste qui tient compte de l'éventualité que n'importe quel accident, même s'il est peu probable, puisse se produire.

La méthode probabiliste ouvre de nouvelles portes quant à la maîtrise des facteurs de sécurité, le niveau précis de fiabilité de chaque variable via des analyses de sensibilité. L'incertitude des paramètres comme la fréquence ou

mode de vibration sera représenté par une variable aléatoire désormais quantifiable avec sa valeur de défaillances. Chacune des approches à ses avantages et ses inconvénients. Ce mémoire va fournir ce qu'il faut pour choisir la meilleure méthode de conception par la méthode de fiabilité des structures.

Ce travail est concentré pour les structures de treillis. Dans ce mémoire, non seulement la méthode déterministe et la méthode probabiliste seront définies; mais aussi ces deux méthodes seront comparées tant dans la théorie que dans des cas pratiques. Par la suite, des applications sur une structure de trois barres seront établies. La méthode des éléments finis sera utilisée pour trouver les sollicitations pour la conformité aux normes selon la méthode déterministe et pour déterminer l'expression du comportement pour les calculs de fiabilité. La méthode sera généralisée par un exemple exhaustif sur un pont plus complexe.

Dans ce chapitre introductif, l'emphasis sera mise sur une analyse critique des deux méthodes de conception : déterministe et probabiliste. Un cas pratique sera étudié en précisant les différentes étapes des analyses par la méthode des éléments finis. Respectivement, la problématique soulevée, les objectifs visés et la méthodologie préconisée par ce mémoire seront détaillés.

Le second chapitre est réservé à l'historique des méthodes de conception des structures jusqu'aux progrès récents dans l'analyse de fiabilité. La théorie et les techniques pour procéder à une étude de fiabilité basé sur la résistance seront traitées dans le chapitre trois; tandis qu'au chapitre sera résolu un cas pratique selon les deux méthodes : déterministe et probabiliste. Cette méthode sera généralisée au chapitre cinq. Les recommandations et conclusions feront l'objet du chapitre six.

1.2 Méthode déterministe versus méthode probabiliste

Les éléments porteurs d'une structure : fermes, poutres, dalles, murs, poteaux, contreventements, fondations, etc. doivent être dimensionnés pour offrir une résistance R_r au moins égale à la somme de la plus grande sollicitation S_f à laquelle elle peut être soumise $R_r \geq S_f$. La différence entre R_r et S_f augmente pour conserver la même probabilité de rupture. C'est le calcul aux états limites par l'approche déterministe.

L'expression R_r désigne la résistance nominale pondérée d'un élément de structure. Par exemple, une poutre doit offrir une résistance à la flexion tandis qu'un poteau doit pouvoir développer une résistance à la compression. Ces résistances sont désignées par R_r . Il en est de même pour S_f , c'est la résultante des charges pondérées appliquées sur un élément de structure. Cette force peut être un moment, un cisaillement, une compression ou une tension. La maîtrise de la résistance des matériaux et de l'analyse des structures permet à l'ingénieur de modéliser le système et de déterminer les déformations et les contraintes à n'importe quel point de la structure.

Le Code National Canadien du bâtiment qui définit les types de charges à considérer pour une structure, impose un coefficient, α_i , qui est le coefficient de pondération des charges. En fonction du matériau utilisé comme l'acier, le béton armé, ou le bois, les normes de conception imposent des coefficients de tenue ϕ pour le calcul de la résistance des systèmes.

L'équation 1.1 alinéa 6 du commentaire A du Guide de l'utilisateur – CNB 2010, Commentaires sur le calcul des structures, impose sans équivoque :

$$\text{résistance pondérée} = \text{effets des charges pondérées, ou } \phi R = \sum \alpha_i S_i \quad (1.1)$$

Le coefficient de tenue ϕ appelé aussi coefficient de résistance a pour fonction de réduire par exemple de 10, 20, ou 35% la capacité de résistance d'un

élément de structure. En fonction de la difficulté de mise en œuvre ou de fabrication de la structure, les normes imposent la valeur à utiliser pour ces coefficients. Le coefficient de tenue en service de l'acier de construction est $\phi_s = 0.90$, tandis que celui du boulon $\phi_b = 0.80$ et celui du béton est $\phi_c = 0.65$.

Le couplage des courbes de la densité de probabilité de dépassement des sollicitations et de la résistance donne la marge de sécurité retenue pour le point de conception. Non seulement cette approche déterministe est incapable de tenir compte de la multiplicité des forces et résistances variables dans la structure en exploitation; mais aussi elle ne permet pas au concepteur de connaître la marge de sécurité de l'ouvrage dimensionné. L'approche déterministe amène la plupart du temps à un surdimensionnement de certaines structures.

Tout de suite dans ce texte, un cas pratique sera étudié en suivant la méthode déterministe.

Les actions suivantes permettent d'étudier et de pratiquer les notions théoriques sur un treillis à trois barres en analysant le treillis avec la méthode des éléments finis pour trouver l'expression du déplacement du système.

1.3 Treillis à trois barres : Méthode des éléments finis

Pour démarrer la discussion dans cette recherche, un exemple d'un treillis à trois barres sera exposé [1, 2]. La figure 1 montre ce treillis tandis que les angles sont représentés dans la figure 2.

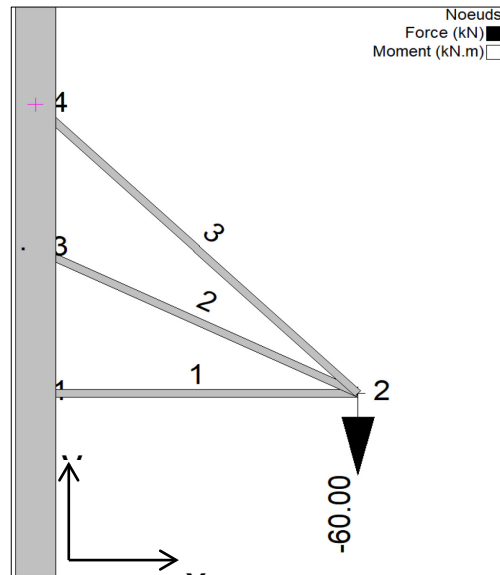


Figure 1 : Application proposée : treillis à trois barres

C'est une structure discrétisée avec 4 nœuds et 3 éléments. L'élément 1 est connecté aux nœuds 1 et 2, l'élément 2 au nœud 2 et 3 tandis que l'élément 3 est connecté aux nœuds 2 et 4.

L'objectif de l'étude est d'obtenir la flèche (déplacement au nœud 2 qui est u_2) dans la direction gravitaire y.

L_1 est la longueur de la barre 1.

Dans cette structure les variables sont :

- La charge P en Newton (N);
- Les longueurs par rapport à une barre L_1 en millimètre (mm);
- L'aire A et en millimètre carré (mm^2);
- Le module de Young E en (MPa).

Afin d'appliquer le modèle par éléments finis, l'expression suivante doit être trouvée:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (1.2)$$

Avec,

$[K]$: Matrice des rigidités en N/mm;

$\{u\}$: Vecteur des déplacements en mm;

$\{F\}$: Vecteur des chargements en N;

$\{R\}$: Vecteur des réactions d'appuis en N.

Après réorganisation, en intégrant les réactions aux appuis, l'expression précédente devient :

$$\{R\} = [K]\{u\} - \{F\} \quad (1.3)$$

Pour évaluer cette expression, il faut trouver la matrice de rigidité K [3], et cibler les forces connues F et inconnues R de la structure.

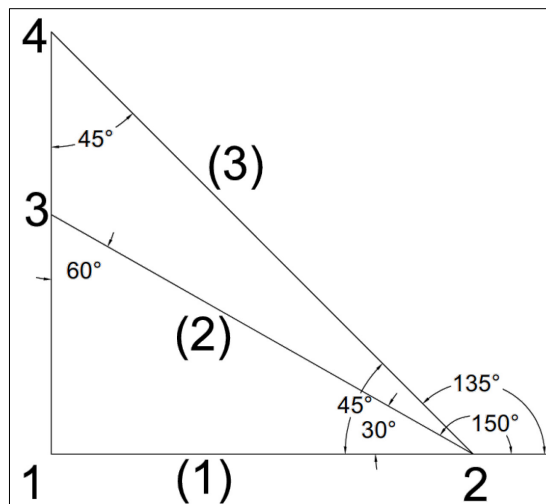


Figure 2 : Géométrie du problème : treillis 3 bars

Les angles sont mesurés par rapport à l'axe horizontal.

Par un constat trigonométrique:

- L'angle barre 1 = 0°
- L'angle barre 2 = 30°
- L'angle barre 3 = 45°
- Longueur $L_2 = L_1/\cos(30^\circ)$
- Longueur $L_3 = L_1/\cos(45^\circ)$

En utilisons la formule (1.2) Le modèle d'élément finis de la structure devient :

$$[K]\{U\} = \{F\} \rightarrow [K] \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La suite donnant les variables (K, U et F) de la formulation par éléments finis sera maintenant abordée.

Étude de la matrice de rigidité : Le coefficient de rigidité axiale des structures soumises à des efforts axiaux seulement : tension ou compression est fonction du matériau et de la géométrie :

$$k_{eq} = \frac{EA}{L} \quad (1.5)$$

La matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre s'écrit :

$$[K_e] = k_{eq} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

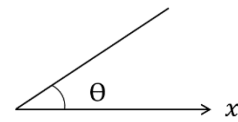
Lorsque le système d'axe de l'élément est différent du système d'axe global et que la matrice est représentée dans un système de référence local, les deux nœuds qui constituent la barre sont notés par leurs coordonnées fixes (XY).

Pour intégrer l'orientation des barres, la transformation de la matrice se fait par l'expression:

$$[K_e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Avec

$$c = \cos\theta \quad s = \sin\theta \quad \text{et}$$



*l'angle θ est en degré par rapport à l'axe x (**Horizontal**).*

De manière pratique, la matrice de rigidité élémentaire des trois bars du treillis sera étudiée dans leur axe local, puis dans l'axe global et pour chaque barre la matrice locale sera écrite dans la matrice globale.

La structure se compose de 4 nœuds avec chacun 2 degrés de liberté. Le produit des deux permet d'obtenir une matrice globale de 8x8.

Proposition d'un scripte pour écrire la matrice élémentaire $[K^e]$ dans la matrice globale $[K^G]$.

D'abord, est créée, une matrice zéro $[A_0]$ de $[n * 2n]$. n étant le nombre de nœuds, soit, pour cette application une matrice zéro de 4x8.

Ensuite, dans chaque ligne, zéro est remplacé par 1 à la position de l'élément, de sorte que dans la matrice globale l'élément se retrouve dans la bonne position avec sa valeur inchangée.

Enfin la transposée de la matrice zéro $[A_0]'$ est multipliée par la matrice élémentaire et par la matrice zéro

$$[K^G]^{(e)} = [A_0]' * [M^e] * [A_0] \quad (1.8)$$

Barre 1, nœuds 1-2

$$\sin(0) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

L'équation (1.7) donne :

$$[K^e]^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L_1} & 0 & -\frac{AE}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L_1} & 0 & \frac{AE}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Le nœud 1, dans la matrice globale représente les lignes et colonnes 1 et 2.
Les éléments (1,1) 1e ligne/1e colonne et (2,2) 2e ligne/2e colonne sont remplacés par 1.

Dans la matrice globale sont représentés les quatre éléments 1, 2, 3 et 4.
Chacun dispose d'un degré de liberté en x et d'un degré de liberté en y. Les huit colonnes peuvent donc être nommées : 1x, 1y, 2x, 2y, 3x, 3y, 4x et 4y.
Ces colonnes peuvent également être identifiées simplement de 1 à 8.

$$[Barre1_{noeud1}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1x & 1y & 2x & 2y & 3x & 3y & 4x & 4y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le nœud 2, la 3e ligne-3e colonne et 4e ligne- 4e colonne sont remplacées par 1.

$$[Barre1_{noeud2}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (1.8) s'écrit

$$[K^G]^{(1)} = [A_1]' * [M^1] * [A_1] \quad (1.10)$$

$$[K^G]^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{AE}{L_1} & 0 & -\frac{AE}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L_1} & 0 & \frac{AE}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^G]^{(1)} = \frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barre 2, nœuds 2-3

$$\sin(30) = \frac{1}{2} = 0,50 ; \quad \cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

$$L_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} L_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} L_1$$

À partir de l'équation (1.7) est obtenue l'expression suivante pour l'élément 2.

$$[K^e]^{(2)} = \frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

En procédant suivant le script démontré plus haut, l'élément 2 s'écrit ainsi dans la matrice globale.

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^G]^{(2)} = [A_2]' * [M^2] * [A_2] \quad (1.11)$$

$$[K^G]^{(2)} = \frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barre 3, nœuds 2-4

$$\sin(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071; \quad \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$$

$$L_3 = \sqrt{2}L_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}L_1$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e]^{(3)} = \frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

$$[K^G]^{(3)} = [A_3]' * [M^3] * [A_3] \quad (1.12)$$

$$[K^G]^{(3)} = \frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

On peut, à présent, additionner les matrices globales des trois barres pour former la matrice de rigidité globale du système en fonction du matériau, de

la géométrie et de l'orientation pour l'ensemble des éléments entre deux nœuds i et j.

$$[K]^G = [K^G]^{(1)} + [K^G]^{(2)} + [K^G]^{(3)} \quad (1.13)$$

La matrice de rigidité totale devient :

$$[K]^G = \frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Vecteur déplacement. Les conditions limites dans les études par éléments sont en grande partie généralement connues du concepteur. À la frontière, certains nœuds peuvent être des appuis. La structure est bloquée dans ces points qui sont capables de reprendre les forces pour les transférer à la fondation. Ici, les appuis sont des rotules, ils supportent la structure dans deux directions qui sont x et y. Pour tous les nœuds qui sont des supports, zéro est posé comme valeur connue dans le vecteur déplacement.

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \end{bmatrix} \quad \{U\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{U_{red}\} = \begin{bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \end{bmatrix}$$

Le **Vecteur Force** est la deuxième condition limite qui est en partie connue de l'ingénieur et rend possibles les analyses par éléments finis. Il s'agit de bien identifier les nœuds sur lesquels une charge est appliquée et dans quelle direction s'exerce cette force. Cette force est remplacée par sa valeur et les autres sont automatiquement également à zéro. Il est à noter que le zéro signifie qu'il n'y a pas de force externe appliquée au nœud et non qu'il y ait absence de sollicitation au dit nœud. La réaction d'appuis dans l'ensemble du système sera égale à la somme des forces appliquées.

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix} \quad \{F\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{F_{red}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$$

La forme du système est obtenue en réécrivant l'équation (1.2).

$$\frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il importe de réduire la matrice $[K]$. Partout où le vecteur déplacement est nul, la ligne dans la matrice globale est annulée à une exception. Dans certaines circonstances, dans la méthode des éléments finis, il y a un risque que par mégarde l'effet sur une charge qui devait être considéré soit annulé. Aussi, une bonne pratique, est de toujours égalée à l'unité la colonne de la ligne annulée vis-à-vis de la charge.

$$\frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 0 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice globale devient :

$$[K] = \frac{AE}{L_1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Le système est réduit à l'équation linéaire $[K]\{u\} = \{F\}$ qui se résout par

$$\{u\} = [K]^{-1} * [F] \quad (1.15)$$

La solution de cette équation donne le déplacement u : u_{2x} et u_{2y} , dans les directions x et y du nœud 2. Ce déplacement est montré dans la figure 3.

$$\begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL_1 2(2\sqrt{2} + 3)}{AE(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sqrt{3})} \\ \frac{PL_1 2(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 8)}{AE(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sqrt{3})} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL_1 11,65685}{AE 9,7773} \\ \frac{PL_1 32,04916}{AE 9,7773} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,192 \frac{PL_1}{AE} \\ 3,2779 \frac{PL_1}{AE} \end{Bmatrix}$$

Dans cette expression le déplacement représente la déformation du nœud 2 selon l'axe y vertical à u_{2y} qui est :

$$u_{2y} = 3,2779 \frac{PL_1}{AE} \quad (1.15)$$

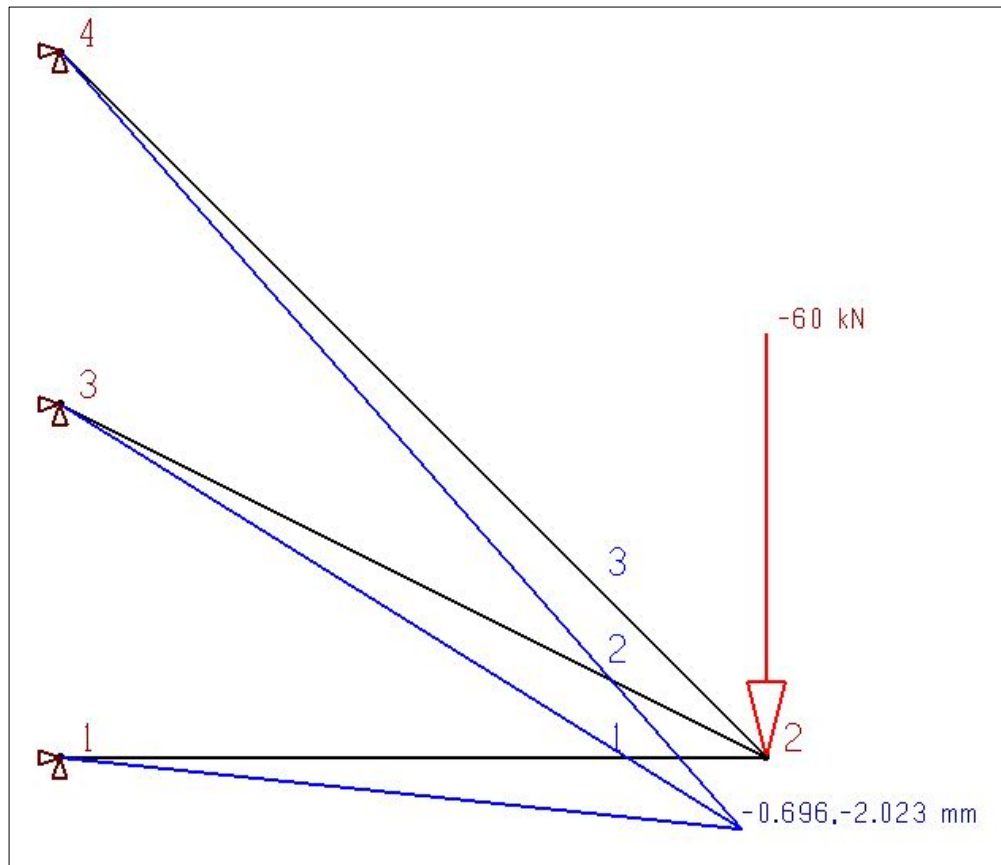


Figure 3 : Déplacement du nœud 2

Finalement, la flèche au point 2, qui est le résultat recherché dans cette simulation par la méthode des éléments finis, devient :

$$u_2 = 3,2779 \frac{PL_1}{AE} \quad (1.35)$$

Avec ces résultats, il sera possible de procéder à la transformation probabiliste de u_2 pour le calcul de fiabilité de la structure. Mais d'abord, il convient de porter attention à la problématique abordée par ce mémoire.

1.4 Problématique soulevée par ce mémoire

Fruits de plusieurs études commençant depuis les années 1990 et aujourd'hui en pleine maturité, la méthode probabiliste est une nouvelle méthode pour la fiabilité structurale utilisable en toute confiance pour plusieurs applications dans lesquelles la probabilité de défaillance est fixée par le concepteur à un seuil dont le dépassement entraînerait l'effondrement de la structure.

Pour certaines structures soumises à une force statique, les outils sont disponibles dans la méthode probabiliste. Mais, par exemple, s'agissant de concevoir une structure complexe soumise à diverses forces statiques et des sollicitations dynamiques dont les modes de vibrations doivent rester à l'intérieure d'une fourchette de fréquence pour le confort de l'utilisateur et l'intégrité structurale du système; la méthode probabiliste n'offre pas des outils flexibles et universels pour la conception structurale.

Les travaux réalisés dans ce mémoire visent à combler ce vide en appliquant les équations et les techniques de la méthode probabiliste au modèle par éléments finis des principaux éléments structuraux.

Visant les phénomènes statiques, notre approche vise à dépasser les méthodes d'approximation comme FORM/SORM et d'évaluer la probabilité de défaillance de manière analytique par un couplage mécano-fiabiliste [4] et de surface de réponse pour obtenir l'expression de la réponse des systèmes stochastiques avec le modèle par éléments finis des principaux éléments structuraux usuels en bâtiment.

Toute structure finit par avoir une défaillance qui a des conséquences économiques, mais malheureusement parfois humaines aussi. La méthode de conception traditionnelle surdimensionne les membrures avec des coefficients de sécurité qui augmentent les charges et réduisent la résistance des matériaux. C'est la méthode déterministe. Avec des calculs qui ne font pas

apparaître le hasard et produisent des ouvrages parfois surdimensionnés, chers et lourds. La méthode probabiliste, plus fine, permet la dispersion statistique des paramètres.

1.5 Objectifs du mémoire

1.5.1 Objectif général

Cette étude compte :

- Développer des outils de calcul de fiabilité qui permettront aux ingénieurs de tirer le meilleur parti du dimensionnement, principalement des treillis, en garantissant un niveau minimal de sécurité tout en préservant la fonctionnalité de chacun des éléments d'une structure dont la résistance sera toujours supérieure aux efforts induits par les charges;
- Dégager des outils pour coupler les modèles d'éléments finis avec les méthodes de statistique et de probabilité de sorte qu'on y intègre facilement l'intelligence artificielle d'un réseau de neurone ou d'algorithme génétique suivant le cas de chargement.

1.5.2 Objectifs spécifiques

De manières particulières ce mémoire vise à :

- Dimensionner de manière efficace les sections des membrures, travaillant dans le domaine élastique, en tenant compte des nombreuses forces, résistances, contraintes et déplacement aléatoire dans la structure;
- Maîtriser la marge de sécurité, par le couplage mécanofabiliste, pour concevoir pour des sollicitations statiques et dynamiques avec un plan de maintenance;

- Améliorer la conception des structures pour reprendre une sollicitation dynamique;
- Appliquer la méthode des éléments finis pour l'analyse des principaux éléments structuraux;
- Détailler des exemples concrets d'application pour des structures travaillant en tension et compression;
- Comprendre des algorithmes développés pour des programmes informatiques pour résoudre différents types de cas.

1.6 Méthodologie préconisée par ce mémoire

Pour procéder à l'analyse de la fiabilité des structures de treillis, les étapes suivantes servent comme méthodologie pour ce travail :

1. En se basant sur un cas réel, utiliser le modèle par élément finis pour déduire la flèche à un point particulier dans la structure;
2. Appliquer la méthode déterministe sur l'exemple;
3. Établir un modèle probabiliste pour inclure l'étude des différentes propriétés et des chargements reliés à la déformation de la structure (Force, Dimensions, Module de Young).
4. Étude de la fiabilité de la structure
5. Généralisation de la méthode.

L'organigramme de la figure 4 montre les étapes à suivre dans la méthodologie préconisée :

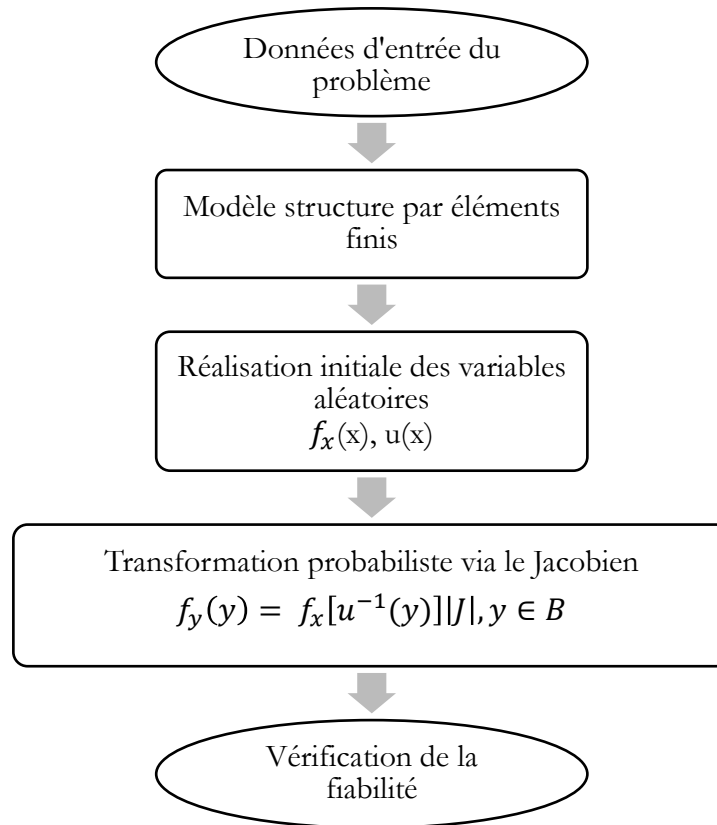


Figure 4 : Résumé des étapes

Les faiblesses de la méthode déterministe compensées par la méthode probabiliste sont démontrées. L'analyse des structures par la méthode des éléments finis afin de déterminer l'expression de la réponse pour procéder à une analyse de fiabilité a des avantages qui ont été constatés dans l'application d'un cas pratique de treillis à trois barres. Les objectifs et la méthodologie employée dans cette étude ont été expliqués. L'histoire du développement des méthodes de conception, les grandes lignes de plusieurs modèles de fiabilité hybride et de méthode d'approximation feront l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE 2. INTRODUCTION À LA FIABILITÉ DES STRUCTURES

Sera abordé dans les sections suivantes; non seulement l'historique de la méthode probabiliste; mais aussi l'historique des méthodes de conceptions. À travers l'analyse critique d'articles de synthèse, les recherches en fiabilité et les progrès récents dans le domaine seront étudiés. Ce chapitre se terminera par l'examen de modèle de fiabilité hybride et des méthodes d'approximation.

2.1 Historique de la méthode probabiliste

Une distinction non négligeable est à faire entre l'ingénierie de fiabilité des systèmes et l'ingénierie de fiabilité des structures. Le premier a émergé comme une discipline à part entière au début des années 50 tandis que le second, jusqu'à aujourd'hui, n'est toujours pas une discipline distincte d'ingénierie. Si en génie industriel et, pour certaines universités [5] [6], en génie mécanique avec concentration systèmes manufacturiers, la maintenance et la fiabilité des systèmes sont enseignées, les programmes de baccalauréat qui forment les ingénieurs civils n'offrent tout simplement pas de cours de fiabilité des structures.

Les besoins à l'origine des efforts pour accroître la théorie de fiabilité viennent principalement des problèmes de composantes électroniques. Aux États-Unis, pendant la Deuxième Guerre mondiale, 60 % des équipements aéroportés envoyés par bateau en Extrême-Orient étaient endommagés à l'arrivée, et 50% des pièces de rechange stockées étaient défectueux avant même de les utiliser. En 1952, le département de la Défense a créé un groupe consultatif sur la fiabilité des équipements électroniques (AGREE) qui publia son rapport en juin 1957 faisant de l'ingénierie de fiabilité une obligation dans le développement de nouveaux systèmes. Les manufacturiers s'y sont

conformés. Les produits sont acceptés seulement après que la preuve d'un niveau de confiance statistique ait été démontrée pour la durée de vie désirée de l'équipement.

Quant à la fiabilité mécanique des structures, ce sont, entre autres, les besoins en aérospatiales et aéronautiques qui vont impulser les premiers avancés. Vers les années 1930, une étude de l'aspect de sécurité des structures sera publiée, ainsi que la fatigue des matériaux soumis à des charges extrêmes de manières cycliques. Pugsley au Royaume-Uni et Freudenthal aux États-Unis sont les leaders dans le développement de fiabilité, motivés par les problèmes de vibration dans les avions commerciaux.

Toute structure sollicitée par des forces supérieures à sa résistance se déforme et dans certains cas jusqu'à l'effondrement de l'ouvrage mettant en danger la vie et les biens des occupants. Les sociétés ont émis des règles au fil des siècles pour baliser le travail du concepteur à la recherche d'un juste équilibre entre la sécurité du public et la performance des constructions. Ici, seront énumérés quelques faits importants sur l'histoire des méthodes utilisées.

Environ 1750 ans av. J.-C., à Babylone le Code d'Hammourabi [7] stipula dans ces articles 229 et 230 : « Un maçon qui a construit une maison de mauvaise qualité qui s'effondre en tuant son propriétaire devra mourir, si c'est le fils du propriétaire qui meurt le fils du maçon sera exécuté, et si les biens du propriétaire sont détruits il devra les remplacer ». Sans rien enlever à la valeur de l'équilibre social que ce code apporta contre des vengeances démesurées, force est d'admettre que ces prescrits simplistes et abusifs qui négligent le niveau de sécurité que la société pouvait consentir, la qualité des matériaux, la connaissance du comportement des sols, les charges du vent, les réponses sismiques, etc., essayèrent malgré tout d'assurer la sécurité des bâtiments en

augmentant les risques pour les constructeurs espérant réduire ainsi la probabilité des effondrements.

Environ trois mille ans plus tard, 1707-1788 de notre ère, afin de pallier le manque de connaissance des charpentiers, le français, Georges-Louis Leclerc [7], comte de Buffon, dirigera plusieurs travaux de recherche sur le renforcement des bois de construction, enregistrant les longueurs, les charges, les flèches, etc. jetant les premières bases d'une étude de fiabilité des structures.

L'essor de l'industrialisation et de la mécanisation amena à de nombreuses ruptures de pièces mécaniques et d'explosions de chaudières engendrant la nécessité de garantir la sécurité des équipements utilisés dans la fabrication et la construction mécanique. La Société Américaine d'Ingénieurs Mécaniques (ASME) fut créée en 1880 pour combler ce besoin.

Les lois statistiques, pour de petits échantillons, répondant aux besoins des industries furent élaborées en 1908 par William Sealy Gosset connu sous le pseudonyme Student.

1926 est considéré comme l'année où les concepts à l'origine des méthodes de fiabilité ont été publiés [7]. Max Meyer proposa les moyennes et les écarts types des variables pour la conception de structures; tandis que Frédéric Thomas Peirce, la même année, 1926, proposa la construction d'une procédure de fiabilité.

2.2 Historique de développement des méthodes de conception de structure

De tous les temps les méthodes de conception de structure ont un objectif commun à savoir tenir compte des incertitudes sur les sollicitations auxquelles une structure peut être soumise et la résistance que peut assurer l'ouvrage. La

conception structurale s'est basée sur des connaissances empiriques, relevant du bon sens et de certaines règles de proportion acquises peu à peu au fil des siècles. Ensuite elle fut le résultat d'études expérimentales s'appuyant sur les deux seuls outils scientifiques disponibles : la loi du mouvement de Newton, principe d'action-réaction et la loi de Hooke, fondatrice de l'élasticité linéaire isotrope.

Le boom industriel du XIXe siècle avec, entre autres, la production en série de sections d'acier engendra un changement des types de construction dont les méthodes traditionnelles de conception sont trop lentes pour s'y adapter. Des principes scientifiques vont naître des théories universellement acceptées, dont la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides et des cours de résistance des matériaux. Le développement des méthodes de conception de structure s'est stabilisé au XXe siècle en trois grandes méthodes [8].

Dans les sections suivantes seront présentées les trois grandes méthodes de conception de structure: la méthode des contraintes admissibles, la méthode de facteur de sécurité globale et la méthode des états limites.

2.2.1 Méthodes des contraintes admissibles

La méthode des contraintes admissibles se résume par la condition que la contrainte maximum ne doit jamais dépasser la contrainte admissible.

$$\sigma_{max} = \sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{k} \quad (2.1)$$

- σ_r est la contrainte critique pouvant amener à la rupture de l'ouvrage;
- σ_{max} est la contrainte de la structure dimensionnée sous l'effet des charges ;
- k est un coefficient de sécurité;
- σ_{adm} est la contrainte admissible des matériaux utilisés.

Cette méthode souffre de deux limitations. D'abord l'absence de vérification de fiabilité quant aux déformations locales dans la plage élastique du matériau; et ensuite l'impossibilité de prendre en compte séparément les incertitudes des données d'entrées.

2.2.2 Méthodes de facteur de sécurité globales

Dans son livre, Reliability analysis for structural design, Milan Holicky [8] a cité la méthode de sécurité globale comme deuxième méthode de conception structurale largement acceptée. Elle se résume par la condition que le facteur de sécurité calculé, FS , doit être supérieur à la valeur permise, FS_{allow} .

$$FS = \frac{q_{admissible}}{q_{action}} > FS_{allow} \quad (2.2)$$

Avec FS_{allow} égale au facteur de sécurité spécifié.

Cette méthode utilisée encore aujourd'hui dans plusieurs calculs géotechniques et de fondation tente, selon l'auteur, de donner une image plus fidèle du comportement des éléments.

Par exemple, le facteur de sécurité de soulèvement d'une semelle de fondation est : $FS_{allow} = 1.5$. Alors si la contrainte admissible du sol est par exemple : $q_{admissible} = 750 \text{ kPa}$ et que la pression des charges et des remblais sur la surface de fondation est par exemple : $q_{action} = 450 \text{ kPa}$ le facteur de sécurité : $\frac{q_{admissible}}{q_{action}} = \frac{750 \text{ kPa}}{450 \text{ kPa}} = 1.67$ est supérieur à la limite spécifiée $1.67 > FS_{allow} = 1.5$ donc la surface de la semelle est suffisante par rapport aux charges et contrainte admissible du sol.

L'insuffisance majeure de cette méthode réside dans l'impossibilité de prendre en compte les incertitudes des données d'entrée. La probabilité de rupture est contrôlée seulement par le facteur de sécurité.

2.2.3 Méthodes de calcul aux états limites

Les matériaux disponibles pour la construction offraient des sections de plus en plus légères traversant des portées de plus en plus grandes, les méthodes de conception devaient tenir compte de la tenue en service pour les flèches, la vibration, les fissures, etc. Plus qu'auparavant, les bâtiments ont des usages multiples et doivent être construits dans des conditions ambiantes diverses. Une théorie générale de calcul de structure devenait une nécessité. La méthode des calculs aux états limites vient répondre à ce besoin [9]. Au Canada, en 1975, 1983 et 1995 cette méthode va graduellement suppléer la méthode des contraintes admissible dans les codes pour les structures en acier, en béton, en aluminium et pour les fondations.

On y distingue les calculs aux états limites ultimes et les calculs aux états limite de service. Le premier met en cause la sécurité et vise à empêcher la défaillance de la structure tandis que le second vise à garantir, même s'il n'y a aucun risque d'effondrement, que l'ouvrage ne subit pas une déformation qui nuit à son usage.

2.3 Revue de quelques résultats de recherches en fiabilité

À travers plusieurs articles de synthèse, les méthodes déterministe et probabiliste seront étudiées dans leur forme simple, mais aussi en traitement d'analyse non linéaire. La fiabilité sera regardée dès ses balbutiements dans des structures à ossature de bois, vis-à-vis de la résistance au feu, dans des fondations et pour la corrosion des barres d'armatures de structure en béton armé.

Dans les sections suivantes, d'abord, les recherches pour compenser les limites de la méthode déterministe seront regardées, ensuite quelques recherches avec la méthode probabiliste seront analysées.

2.3.1 Recherches pour compenser les limites de la méthode déterministe

Tout en faisant leur conception dans la méthode déterministe, plusieurs chercheurs ont essayé de compenser les limites de cette méthode par l'intégration d'algorithme pour des cas particuliers. Les grands déplacements des poutres élancées à parois minces sont l'un de ces cas. Une méthode de calcul mettant à jour la formulation Lagrangienne incrémentant les déplacements non linéaires des sections transversales des poutres a été proposée.

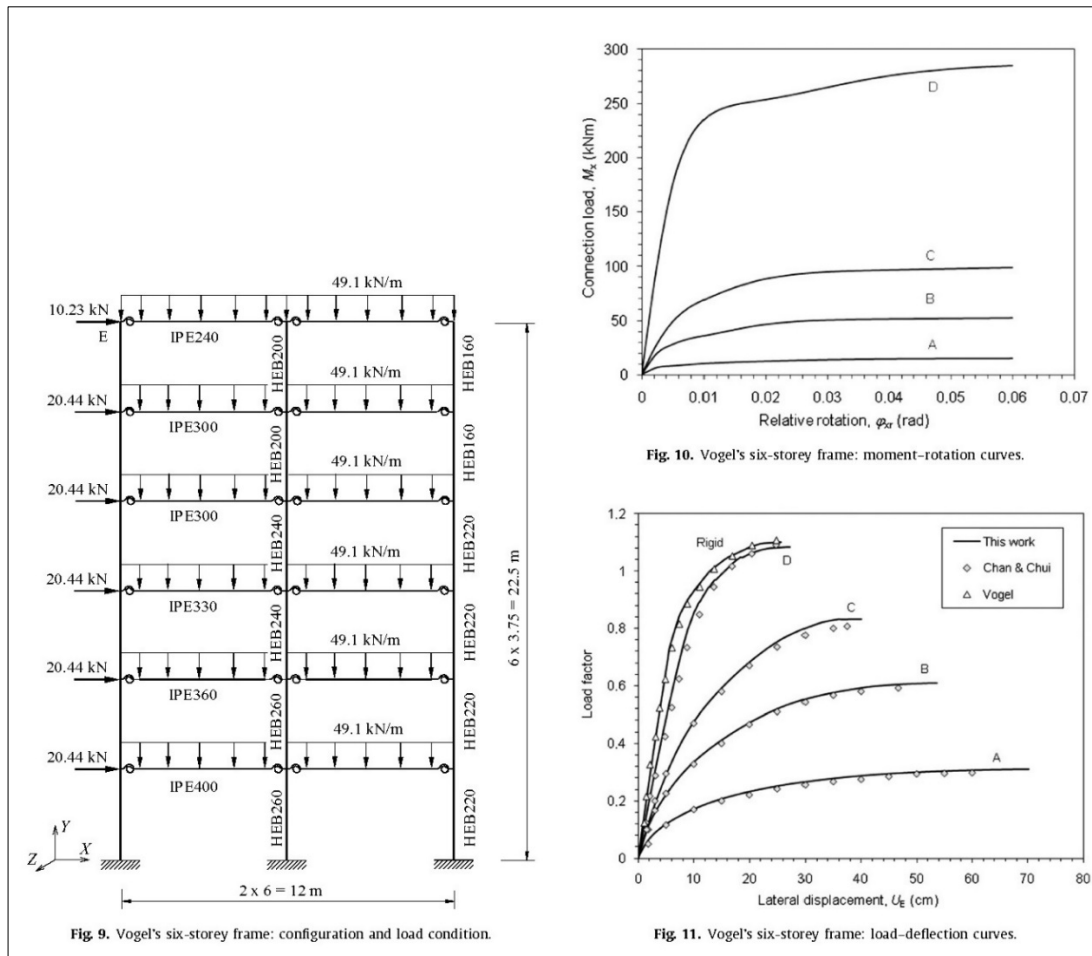


Figure 5 : Analyse non linéaire pour grand déplacement [10]

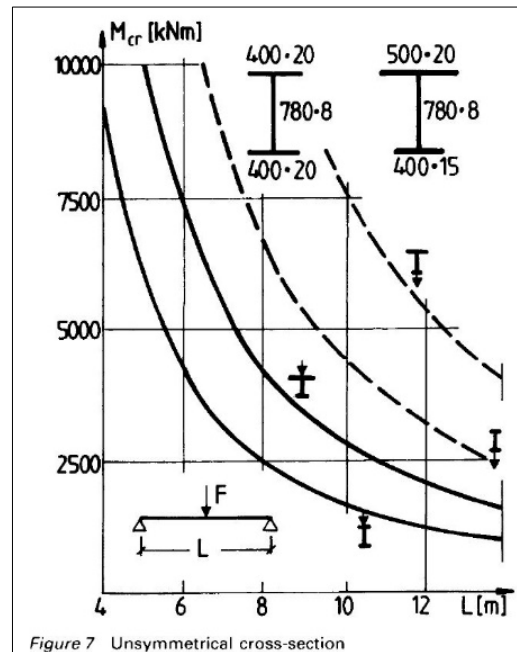


Figure 6 : Sections de poutres à double symétrie travaillant en partie en plasticité [11]

Les moments de rotation et les déplacements latéraux observés à la figure 5 d'un bâtiment 6 étages en acier léger, dévoilent les limites de la méthode déterministe dont les facteurs de sécurité empiriques ne peuvent que pénaliser un tel bâtiment ou sur dimensionner la grande majorité des autres ouvrages moins élancés et avec plus d'inertie.

Le calcul déterministe est en grande partie pensé pour des membrures qui travaillent dans leur domaine d'élasticité. Les théories sont beaucoup plus compliquées lorsque la structure doit performer sous une certaine plasticité. Il apparaît évident par la figure 6 que la méthode déterministe peut difficilement poser une valeur de l'incertitude sur le comportement d'une structure avec des poutres à double symétrie dont les sections et la portée offrent une telle large éventualité de rigidité.

La méthode probabiliste répond au problème de la méthode déterministe en fournissant une quantification de la fiabilité.

2.3.2 Recherches avec la méthode probabiliste

Les combinaisons de ces incidents ou des erreurs humaines pouvant produire une défaillance unique ou multiple sont considérées avec leur probabilité respective et évaluées de manière très réaliste. L'approche probabiliste modélise tous les incidents sous forme mathématique. Ces aléas sont dispersés sous forme de variables aléatoires dont une méthode mathématique évalue la transmission au travers d'un modèle déterministe. Arbitrairement différents seuils de défaillance des ouvrages seront définis pour établir la probabilité de défaillance du système pour une conception donnée. La méthode probabiliste repose sur une quantification rationnelle de l'incertitude sur les paramètres du projet. Par exemple, un calcul de fiabilité d'une structure à ossature de bois à montrer le modèle de dommages variables dans le temps selon plusieurs approches probabilistes [12].

Preuve de la quantification de l'incertitude, la fiabilité de la résistance au feu d'une poutre de bois [13] pendant différents mois de l'année a été évaluée. L'étude démontre que dans des incendies d'environ 15 à 30 minutes la variable stochastique est significative, après 60 minutes le même niveau d'incertitude recommence.

Dans l'objectif d'évaluer la probabilité que sous un chargement donné une structure puisse être considérée défaillante en prenant en compte le comportement réel des différentes variables agissant sur la structure, la résistance à retenir pour le module élastique de l'acier a été étudié et montre sans équivoque la fiabilité de la résistance d'une poutre d'acier dans la limite élastique de la membrure. [14]

L'algorithme Hasofer-Lind et Rackwitz-Fiessler [15] a été mis en œuvre pour étudier les effets du temps de corrosion des barres d'armatures dans une poutre en béton armé. Malgré la complexité de ce processus de corrosion de l'acier des barres d'armatures qui entraîne la réduction des sections transversales des barres et la réduction de la résistance du béton armé, le puissant algorithme a pris en compte toutes les incertitudes et résolu le problème en montrant à la figure 7 la réduction du moment de flexion résistant de la poutre corrodée au fil des ans et la probabilité mesurée de la défaillance.

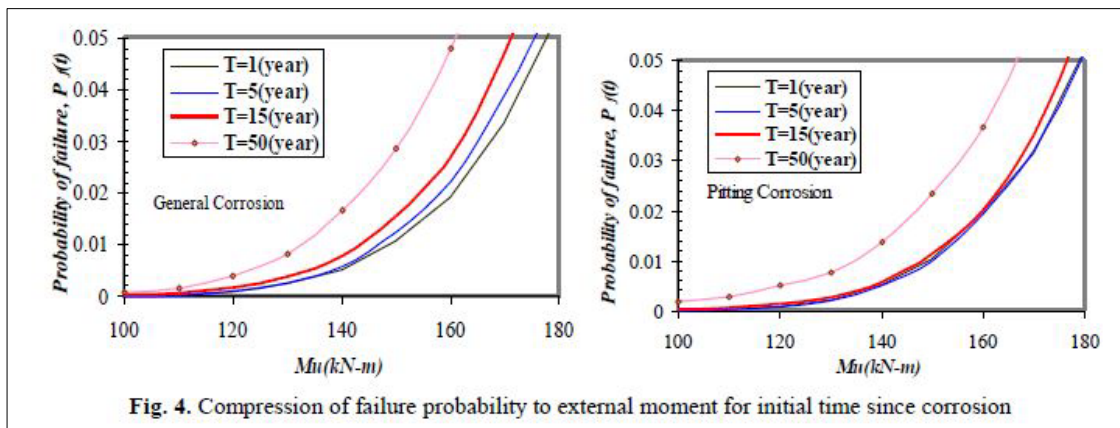


Fig. 4. Compression of failure probability to external moment for initial time since corrosion

Figure 7 : Fiabilité corrosion de barres d'armatures

2.4 Progrès récents dans l'analyse de fiabilité et position de la recherche à nos jours

L'intelligence artificielle pour des analyses de sensibilité, des indices de robustesse pour faire de l'optimisation par l'analyse de fiabilité représentent les champs d'expertises des recherches des dernières années [16-23].

Pour avoir une complète maîtrise de son ouvrage, l'ingénieur a besoin de hiérarchiser l'influence des variables d'entrée et de déterminer celles qui influencent le plus le comportement du système. Il est indispensable de relever les paramètres sensibles avec soin de sorte que les incertitudes sur ces paramètres soient fortement diminuées [24].

La figure 8 montre deux exemples d'organigramme où la puissance de calcul des ordinateurs est mise à contribution pour réaliser autant d'itération qu'il le faut pour trouver le point critique et permettre une évaluation avancée de la sécurité de la conception des structures. En utilisant une simple fonction de substitut, des algorithmes génèrent des valeurs pour chaque variable en fonction d'une matrice de corrélation et des paramètres statistiques.

Les méthodes alternatives d'optimisation dans les méthodes d'analyse de fiabilité sont une contribution récente de la communauté scientifique. La figure 9 fournit des exemples de réseaux de neurones artificiels qui peuvent substituer des modèles aux éléments finis dans l'évaluation des fonctions d'état limite.

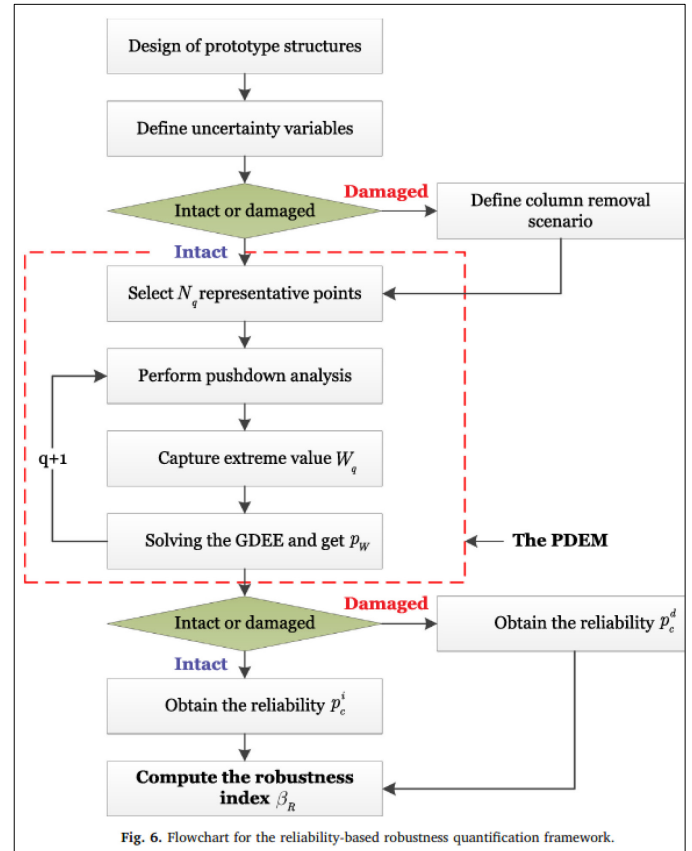
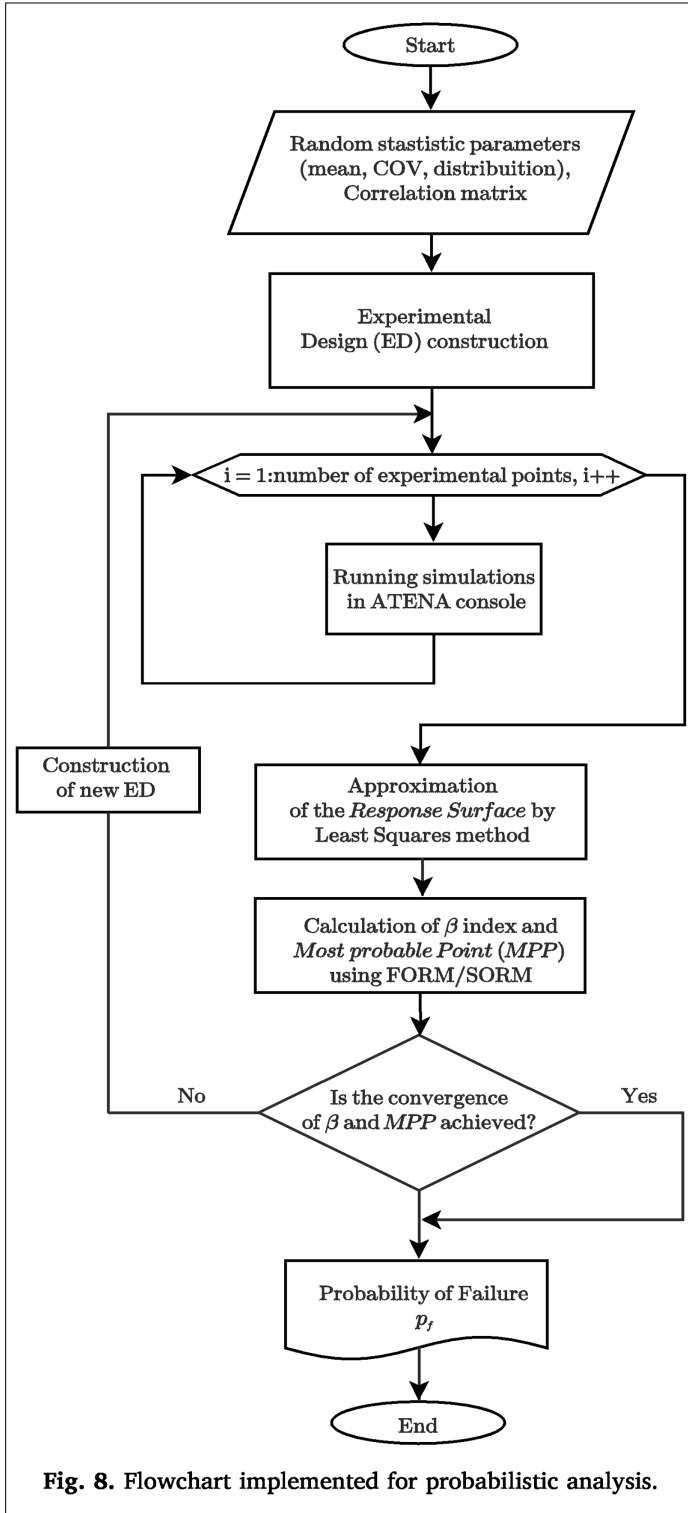


Figure 8 : Exemples d'organigrammes robustes pour le calcul de fiabilité
[25, 26]

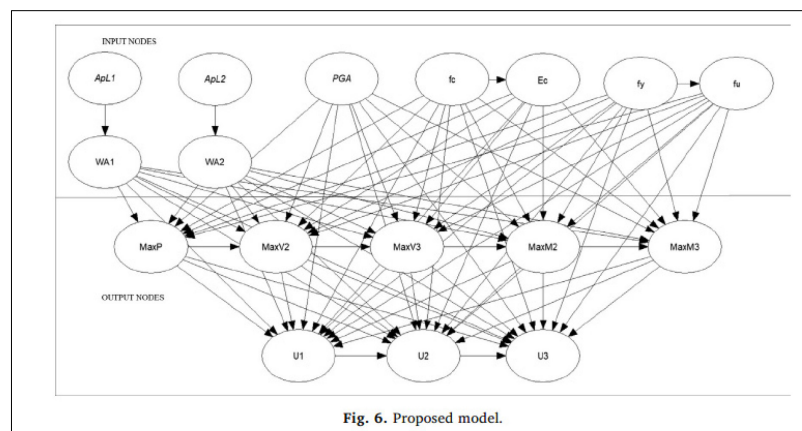
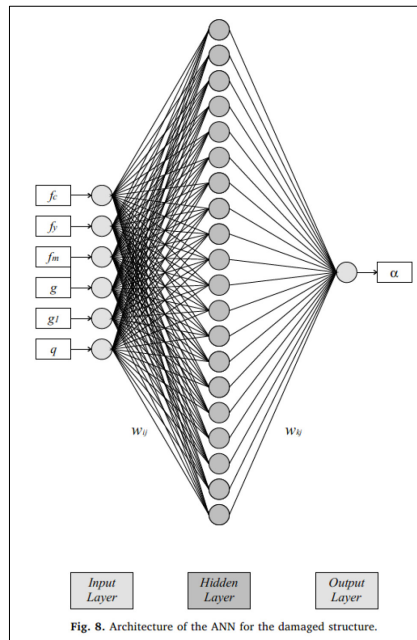


Figure 9 : Exemple de réseaux de neurones artificiels pour le calcul de fiabilité [27, 28]

Des algorithmes génétiques en fiabilité des structures réussissent à remplacer les variables aléatoires qui ont plus d'influence dans la défaillance des systèmes. Des études suggèrent la détermination du point de conception en

utilisant des algorithmes génétiques avec un schéma de pénalité appliquée sur des fonctions d'états limite non linéaires.

Rappelons que contrairement à la méthode déterministe pour laquelle il existe un nombre important de logiciels comme Advance Design America (ADA), Safi, Autodesk Robot, Etabs, etc. qui calculent les structures, il n'y a toujours pas de logiciel qui calcule la fiabilité des structures.

2.5 Modèles de Fiabilité hybride

2.5.1 Fiabilité des structures superposant plus de deux paramètres aléatoires

La résistance et la charge dans les principales conceptions structurales dépendent de plusieurs autres variables, comme les variables des paramètres de conception du système en fonction des critères de rendement. Par exemple, la charge P appliquée sur une colonne produit une variable de contrainte de compression, une variable de sollicitation en flexion-compression, une variable de voilement local, etc.

$$S = f(u, v, w \dots) \quad (2.3)$$

Il est de même pour la résistance, S , de cette colonne, dont l'aire, la longueur, l'inertie, le module d'élasticité, etc. sont des variables aléatoires qui se superposent sur la structure.

$$L = f(x, y, z \dots) \quad (2.4)$$

La fonction d'état limite, encore appelé marge de sécurité, peut être définie comme :

$$Y = g = f(S, L) = S - L \quad (2.5)$$

$$Y = g(\vec{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.6)$$

Soient X_i le vecteur de base qui regroupe les n variables de conception S et L , issue des facteurs de performance, des paramètres de conception, des données de fabrications, etc.

$$X_i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

L'évènement sur ces variables peut être défini comme la fonction de densité conjointe des variables de bases du produit :

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.8)$$

La fonction d'état limite est :

$$Y = g(\vec{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.9)$$

Si les fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ étaient connus; la fiabilité se calculerait mathématiquement par l'intégration :

$$R = 1 - P_f = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots \cdot dx_n \quad (2.10)$$

$$g(\vec{X}) > 0$$

Dans la pratique, les fonctions de densité de probabilité ne sont pas connues ou sont complexes rendant les méthodes classiques inefficaces pour calculer la fiabilité de ces cas. D'autres méthodes de calcul de probabilité de défaillance se sont imposées et ont fait leurs preuves. Parmi elles, les méthodes d'approximation et les méthodes par simulations qui seront l'objet du prochain chapitre.

2.5.2 Couplage mécano-fiabiliste

Le couplage de la méthode des éléments finis associé avec les méthodes de fiabilité pallie la limite des deux méthodes pour en tirer le meilleur de chacun. Les codes des éléments finis évaluent la fonction d'état G et de ses gradients, tandis que le code probabiliste définit les réalisations du vecteur des variables aléatoires z par une transformation iso probabiliste, une validation des pas de calcul et la convergence vers le point de conception avec indicateur de fiabilité.

La première méthode de couplage à comprendre est la méthode de couplage directe dans laquelle une évaluation directe de l'indice de fiabilité est produite. Cette méthode regroupe toutes les procédures de fiabilité qui sont basées sur un algorithme de recherche de l'indice β en utilisant directement le modèle en éléments finis d'une structure. Les appels au maillage de modèle en éléments finis se font à chaque itération pour l'évaluation de la fonction limite.

2.5.3 Méthode de surface de réponse

La méthode de surface de réponse permet au concepteur de trouver une fonction d'approximation qui représente le comportement des phénomènes physiques dans le domaine de variation. Elle vise à proposer des formulations analytiques explicites des réponses d'un système mécanique. La méthode de surface de réponse construit un polynôme pour approximer la fonction de performance en utilisant un certain nombre de points d'échantillon au voisinage du point de défaillance le plus probable.

La surface de réponse est la représentation géométrique de la réponse d'un processus aléatoire à des variables. La réponse résulte du transfert par une fonction de réponse explicite des variables d'entrée du système. Lorsque la valeur des variables change, la valeur de fonction suit. Un cycle en trois étapes : les variables d'entrée, la fonction de transfert et la réponse.

2.6 Méthodes d'approximation

Les méthodes d'approximation sont basées sur une approximation de la loi de distribution des variables. Elles consistent à ramener le calcul de probabilité à des formules simples pour approcher le domaine d'intégration par sa restriction à l'ordre un ou deux. L'étude de l'état limite d'un point de conception est utilisée pour calculer la probabilité de défaillance. Le développement de Taylor au voisinage du point de conception et la série de Taylor sur les valeurs moyennes constituent la théorie principale de ces méthodes. Une surface sans limites est approchée par un hyperplan tangent à la variable de la probabilité de défaillance.

2.6.1 Méthode d'approximation FOSM: First Order Second Moment

La méthode FOSM du moment premier et second Ordre est basé sur le développement de Taylor du premier ordre d'approximation de la fonction de performance. Cette méthode n'utilise que les statistiques du second moment des variables aléatoires, à savoir, les moyennes et les covariances. Pour une distribution normale de S et L avec leurs statistiques indépendantes μ_S et μ_L comme moyenne et σ_S et σ_L comme écart type. La fonction d'état limite $X = S - L$ s'exprime avec la statistique, moyenne de $g(X)$:

$$\mu_X = \mu_S - \mu_L \quad (2.11)$$

Et L'écart type de $g(X)$:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} \quad (2.12)$$

La fonction de probabilité de défaillance est ainsi:

$$P_f = P(g(X) < 0) = P[S - L < 0] \quad (2.13)$$

$$P_f = P\left[Z = \frac{g(X) - \mu_{g(x)}}{\sigma_{g(x)}} < \frac{0 - \mu_{g(x)}}{\sigma_{g(x)}}\right] = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{g(x)}}{\sigma_{g(x)}}\right) = 1 - \Phi(\beta) \quad (2.14)$$

Avec β qui mesure la fiabilité de la fonction d'état limite $g(X)$. Dans cette méthode, β est le fameux point de conception qui permet d'estimer la probabilité de défaillance, plus précisément la distance qui sépare le point de conception à la surface de défaillance dans l'espace d'origine. Cornell et Hance ont proposé cet indice de fiabilité qui porte aussi le nom d'Indice de fiabilité de Cornell :

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (2.15)$$

Les indices de fiabilité ont le mérite d'être une mesure universelle qui permet de comparer les fiabilités de différentes structures et retenir la fiabilité d'un système. Plus l'indice de fiabilité est élevé, plus la probabilité de défaillance est faible et donc plus la structure est fiable.

Ainsi lorsque plusieurs variables aléatoires se superposent dans la fonction de performance et les dérivés sont évalués aux valeurs moyennes des statistiques, le développement de la série de Taylor sur les deux premiers termes permet de trouver :

$$\mu_g = E[g(x)] = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (2.16)$$

$$Variance(g) = \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right) Cov(X_i, X_j) \quad (2.17)$$

Avec $Cov(X_i, X_j)$ comme covariance de X_i et X_j

2.6.2 Méthode d'approximation FORM: First Order Reliability Method

Comme indiqué dans la section précédente, la méthode FOSM fait élargir, dans la série de Taylor, la fonction g de l'état limite (x) sur les statistiques des valeurs moyennes aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n ; tandis que la Méthode de Fiabilité

du Premier Ordre : FORM, fait étendre l'état limite $g(x)$ sur le point de rupture le plus probable, qu'on appelle aussi point de conception.

Sachant que S et L suivent la loi normale, il est permis d'écrire :

$$g(S, L) = S - L = 0 \quad (2.18)$$

$$\tilde{S} = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \Rightarrow S = \mu_S + \tilde{S}\sigma_S \quad (2.19)$$

$$\tilde{L} = \frac{L - \mu_L}{\sigma_L} \Rightarrow L = \mu_L + \tilde{L}\sigma_L \quad (2.20)$$

La surface de l'état limite peut donc s'exprimer par :

$$g(\tilde{S}, \tilde{L}) = S - L = \mu_S - \mu_L + \tilde{S}\sigma_S - \tilde{L}\sigma_L \quad (2.21)$$

Hasofer et Lind ont proposé une définition de l'indice de fiabilité qui ne varie pas en fonction la formulation mathématique de la marge de sécurité. Cet indice de fiabilité appelée β_c est, par définition, la plus petite distance de l'origine $O(0,0)$ à une surface de rupture $g(U) = 0$.

L'indice de fiabilité se calcule par un problème d'optimisation :

$$\beta_c = \min_{g(U)=0} \sqrt{\sum_{i=1}^n U_i^2} \quad (2.22)$$

La figure 10 montre le graphique de l'espace géométrique de l'indice de fiabilité Hasofer et Lind avec P , le point de conception se trouvant sur la fonction d'état limite et représentant la distance la plus courte à l'origine connu ($S = 0, L = 0$).

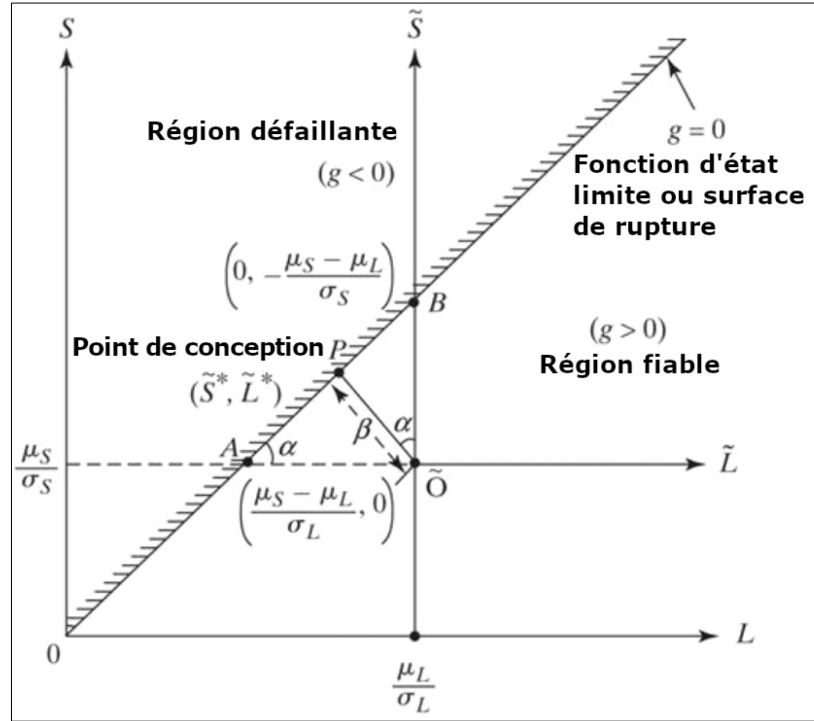


Figure 10 : Courbe de l'indice de fiabilité Hasofer-Lind [29]

En fonction de la probabilité de défaillance, il est possible de définir l'indice de fiabilité comme une valeur négative de l'inverse de la fonction de distribution dans l'espace des variables normales, centrées, réduites et indépendantes :

$$\beta = -\Phi_U^{-1}(P_f) \quad (2.23)$$

On se rappelle l'expression générale de β :

$$\beta = \frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}} \quad (2.24)$$

La représentation graphique formée par la fonction $g(\tilde{S}, \tilde{L})$ permet de trouver la distance la plus petite entre la droite et la moyenne, ce qui donne le point de conception et les équations trigonométriques suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{\beta}{\tilde{O}A} = \frac{\beta}{\frac{\mu_s - \mu_L}{\sigma_L}} \quad (2.25)$$

$$\cos \alpha = \frac{\beta}{\tilde{O}B} = \frac{\beta}{\frac{\mu_s - \mu_L}{\sigma_s}} \quad (2.26)$$

Et

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.0$$

2.6.3 Méthode d'approximation SORM: Second Order Reliability Method

La Méthode de Fiabilité du Second Ordre : SORM vient combler les erreurs que peut générer la méthode FORM dans l'évaluation de l'indice de fiabilité pour des fonctions dont les états limites sont fortement non linéaires.

La procédure de calcul du point de conception démarre avec une matrice identité orthogonale qui sera évaluée par l'algorithme de Breitung.

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-1/2} \quad (2.28)$$

Avec κ_i qui est les principales courbures de la surface de l'état limite au point de conception.

2.6.4 Simulation : Méthode Monté Carlo

Lorsque plusieurs variables aléatoires se superposent dans la fonction d'état limite d'une structure, ou en présence de problèmes complexes comptant

plusieurs variables aléatoires liées par des équations non linéaires, à part les méthodes d'approximations présentées dans les sections précédentes, la simulation par la méthode de Monté Carlo est l'outil qui permet de calculer la fiabilité de la structure. C'est une méthode robuste [30], non intrusive et la plus largement utilisée.

Monté Carlo est en réalité un terme générique qui désigne n'importe quelle méthode qui vise à calculer une valeur numérique en utilisant des techniques probabilistes pour générer des nombres aléatoires.

C'est en 1947 que Von Neumann a proposé la règle, appelée : « Règle d'Or de l'échantillonnage » à la base des simulations de Monté Carlo. Se basant sur la propriété de la croissance de la fonction de répartition $F_x(X)$ et sur la propriété $y = F_x(X)$ qui suit la loi uniforme $U(0,1)$, la règle consiste à effectuer la transformation inverse de la variable en deux opérations. D'abord générer le nombre u à partir de la distribution $U(0,1)$, par la suite calculer la valeur $x = F^{-1}(u)$ en utilisant le nombre u généré.

L'application de base de la simulation de Monte Carlo consiste donc en un générateur de nombres aléatoires appropriés et indépendants aux charges et aux propriétés structurelles des matériaux. La force de la méthode réside dans l'indépendance des réponses par un traitement en parallèle puisque toutes les tâches sont complètement indépendantes et nécessitent peu de communication.

La méthode des congruences linéaires générant une suite de nombres entiers compris entre 0 et m^{-1} donne :

$$x_{i+1} = (ax_i + b)(modulo\ m) \quad (2.29)$$

$$x_{i+1} = ax_i + b - mn_i \quad (2.30)$$

À noter que les équations 2.28 et 2.29 sont intégrées dans les logiciels de calculs numérique comme Excel, Matlab, Python, etc.

Le générateur de la simulation de Monté Carlo évalue l'intégrale de la fonction de défaillance d'une structure dans un certain nombre d'appels à la fonction d'état limite.

Le développement des méthodes de conception des structures étant couvert, l'étude de fiabilité pour les calculs de structure peut être maintenant abordée en profondeur.

CHAPITRE 3. FIABILITÉ BASÉE SUR LA RÉSISTANCE

Il sera établi, sous cette rubrique, les relations de base pour déterminer la fiabilité d'une structure et comprendre l'expression de fiabilité et de probabilité de rupture en termes de probabilité de distribution de la sollicitation et de la résistance.

3.1 Expression générale de fiabilité et de probabilité de défaillance

Quelle que soit la structure : une poutre, un poteau, une dalle, une fondation, un pont, etc. elle est soumise à des charges appliquant une sollicitation. La descente des charges, l'analyse du point d'application de la charge jusqu'à la réaction aux appuis permet de calculer la sollicitation engendrée sur la structure. Appelons, L , de l'anglais *Load* signifiant charges, la sollicitation appliquée sur le modèle.

En fonction de la propriété du matériau, de la section transversale, de la géométrie et des équations du comportement apprises en résistance des matériaux, il est possible de calculer la contrainte de résistance effective de la structure. Appelons S , de l'anglais *Strength* signifiant résistance, la résistance de la structure étudiée.

Les contraintes tout comme les résistances varient d'une structure à l'autre, d'une condition à l'autre et peuvent varier également en fonction du temps. Les notions du temps permettent de faire apparaître les notions de fiabilité.

S'il advient que la sollicitation appliquée sur une structure soit supérieure à sa capacité de résistance, il y a risque d'effondrement, de rupture. Le calcul à l'état limite vise à avoir en tout temps, la résistance supérieure aux sollicitations :

$$S > L \quad (3.1)$$

$$S - L > 0$$

Pendant la durée de performance de l'ouvrage, il y a une probabilité qu'une combinaison de charge engendre une contrainte supérieure à la résistance d'une section ou d'un joint de la structure.

$$P(S - L) > 0 \quad (3.2)$$

La technique de fiabilité, R , de l'anglais *Reliability* signifiant fiabilité, permet de contrôler cette probabilité qui amène à la rupture de l'ouvrage.

$$R = P(S - L) > 0 \quad (3.3)$$

On peut donc définir la fiabilité $R(t)$, selon Corazza, 1975) comme la caractéristique d'une structure exprimée par la probabilité qu'elle accomplisse la fonction pour laquelle elle a été conçue, dans des conditions données et pendant une durée donnée.

$$0 \leq R(t) \leq 1 \quad (3.4)$$

Appelons $f_{S,L}(s, l)$ la fonction de densité conjointe de S et L . L'étude de fiabilité consiste à réaliser une double intégration de cette fonction.

$$R = \iint f_{S,L}(s, l) ds dl \quad (3.5)$$

L'équilibre parfait où la charge est égale à la résistance $g(s, l) = s - l = 0$ constitue la limite des régions d'intégration pour calculer la fiabilité de la structure. Quand $g > 0$ la fiabilité est déterminée; tandis que de l'autre côté de la limite, quand $g < 0$, c'est la zone de défaillance permettant de calculer la probabilité de rupture. Ces régions d'intégration sont montrées dans la figure 11.

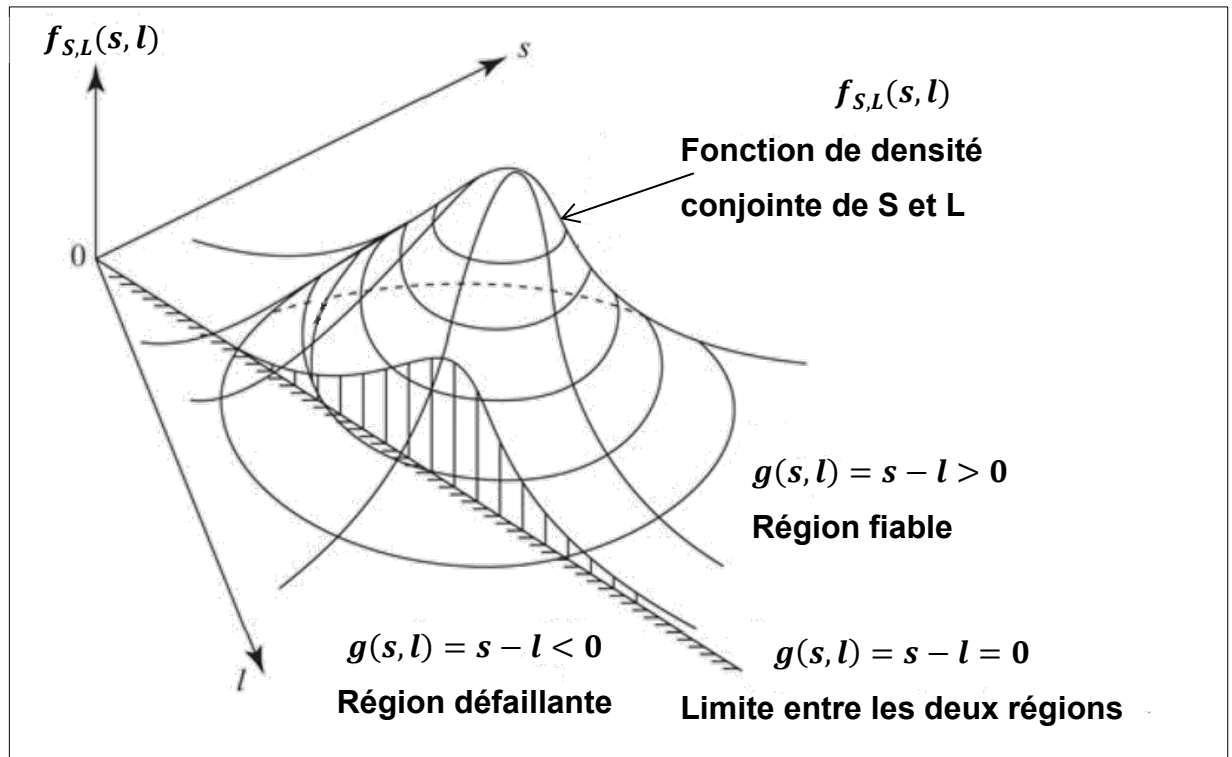


Figure 11 : Région d'intégration fiabilité et probabilité de rupture [29]

L'interférence entre la fonction de densité de S et L est montrée à la figure 12. Une partie de la surface formée par la fonction de densité de la charge $f_L(l)$ a une probabilité d'interférer sur la surface de la fonction de densité de la résistance $f_S(s)$.

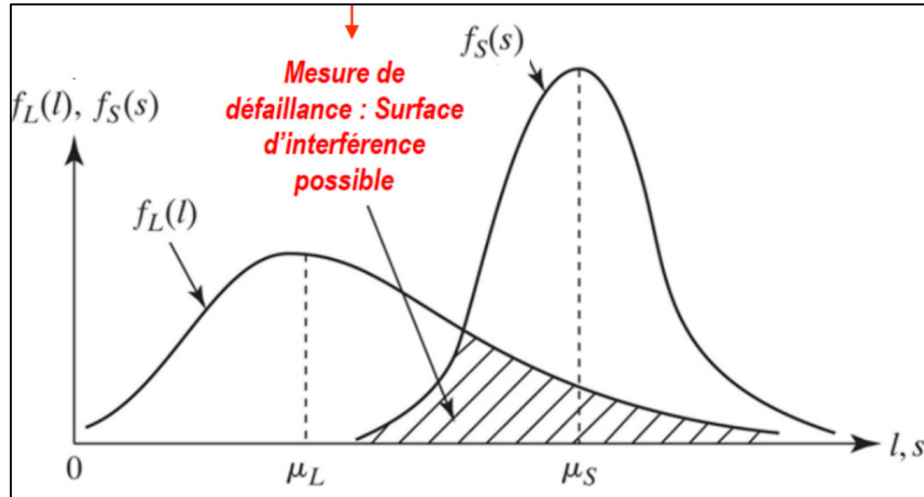


Figure 12 : Probabilité de défaillance [31]

Parmi d'autres expressions alternatives de fiabilité, mentionnons celle où la fiabilité est déterminée comme étant la probabilité de la charge en supposant une valeur inférieure à la force pour toutes les possibilités. Cette expression donne :

$$R = dR = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) \left[\int_{-\infty}^s f_L(l) dl \right] ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) f_L(s) ds \quad (3.6)$$

Quant aux expressions de probabilité de défaillance, la plus générale est la double intégration de fonction de densité conjointe en supposant la valeur de la force inférieure à celle de la charge :

$$P_f = P(S \leq L) = \iint f_{S,L}(s, l) ds dl \quad (3.7)$$

Après réorganisation, cette expression de probabilité de défaillance peut s'écrire :

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_L(S)] f_S(s) ds \quad (3.8)$$

Sachant que l'intégrale de la fonction de densité de $-\infty$ à $+\infty$ est égal à 1, la probabilité défaillance peut aussi s'exprimer par :

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(l) F_S(l) dl \quad (3.9)$$

Pour réaliser des calculs de fiabilité, il est indispensable de non seulement connaître les distributions de probabilité de la résistance et de la charge, mais aussi de vérifier que S et L sont statiquement indépendants et le cas échéant connaître la corrélation entre leur distribution conjointe. L'étude de quelques distributions typiques est l'objet de la prochaine section.

3.2 Fiabilité lorsque la distribution S et L suivent la loi normale

Parmi les méthodes de distributions connues se trouvent: la distribution normale, exponentielle, lognormal, Weibull, gamma, Rayleigh et uniforme. Les éléments de structure suivent la loi normale. Le choix de la distribution pour les applications de cette recherche est donc la distribution normale. La loi normale, par définition, est une probabilité continue d'une moyenne, μ , et d'un écart type, σ , dont la densité, $f(x)$, est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.10)$$

Ainsi, lorsque la charge et la résistance suivent la loi normale, leurs expressions sont respectivement :

$$f_S(s) = \frac{1}{\sigma_S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu_S}{\sigma_S}\right)^2} \quad (3.11)$$

$$f_L(l) = \frac{1}{\sigma_L\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{l-\mu_L}{\sigma_L}\right)^2} \quad (3.12)$$

Avec :

$f_S(s)$ et $f_L(l)$ la distribution normale de la résistance et de la charge respectivement

μ_S et μ_L la moyenne de la résistance et de la charge respectivement

σ_S et σ_L l'écart type de la résistance et de la charge respectivement

Appelons X, la fonction d'état limite du système.

$$X = S - L \quad (3.13)$$

Puisque S et L sont des variables aléatoires normalement distribuées; étant une fonction linéaire, il en est de même pour X qui est une variable aléatoire et a une distribution normale.

Pour S et L, statistiquement indépendants, l'équation de la probabilité de la fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2} \quad (3.14)$$

Avec

$$\mu_X = \mu_S - \mu_L \quad (3.15)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} \quad (3.16)$$

La fiabilité du système peut s'écrire :

$$R = P(X \geq 0) = \int_0^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2} dx \quad (3.17)$$

En définissant une variable normale standard appelée z qui est égale à :

$$z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \quad (3.18)$$

La limite inférieure et supérieure de l'intégration de X, nommé z_1 , se calcule en remplaçant μ_X et σ_X par leur valeur:

$$z_1 = \frac{0 - \mu_X}{\sigma_X} = -\frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}} = -\beta \quad (3.19)$$

β est appelé indice de fiabilité.

Pour S et L statistiquement indépendants, la fiabilité en fonction de z et de β s'écrit :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z=z_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(\beta) \quad (3.20)$$

$\Phi(\beta)$ dénote la valeur de la fonction de distribution cumulative de la variable normale standard.

S'il n'existe pas une corrélation entre S et L.

Appelons $\rho_{S,L}$, quand elle existe, la corrélation entre S et L. L'indice de fiabilité et la borne de l'intégration s'expriment par :

$$z_1 = -\beta = -\left(\frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2 - 2\rho_{S,L}\sigma_S\sigma_L}} \right) \quad (3.21)$$

3.3 Représentation graphique de la distribution suivant la loi normale

Pour mieux comprendre, voici un exemple dans laquelle sera démontrée l'incidence de l'écart type dans une analyse de fiabilité.

Considérons le cas d'une structure réalisée en ossature de bois d'épinette S-P-F no 1 classé visuellement dont l'écart type de la résistance varie de manière importante d'une membrure à l'autre. Les données recueillies sur trois membrures donnent les valeurs suivantes de moyenne et d'écart type pour la résistance:

$$\mu_{S_1} = 100 \quad \sigma_{S_1} = 5$$

$$\mu_{S_2} = 100 \quad \sigma_{S_2} = 10$$

$$\mu_{S_3} = 100 \quad \sigma_{S_3} = 20$$

Le graphe de la probabilité de la fonction de densité de ces membrures se dessine par les équations :

$$S_1(x) = \frac{1}{\sigma_{S_1} \sqrt{2\pi}} e^{\left[-1/2 \left(\frac{x - \mu_{S_1}}{\sigma_{S_1}}\right)^2\right]}$$

$$S_2(x) = \frac{1}{\sigma_{S_2} \sqrt{2\pi}} e^{\left[-1/2 \left(\frac{x - \mu_{S_2}}{\sigma_{S_2}}\right)^2\right]}$$

$$S_3(x) = \frac{1}{\sigma_{S_3} \sqrt{2\pi}} e^{\left[-1/2 \left(\frac{x - \mu_{S_3}}{\sigma_{S_3}}\right)^2\right]}$$

Dans un repère orthonormé où x varie de 40 à 140 et l'axe des ordonnées est constitué des trois fonctions de densité de probabilité, il est facile d'obtenir la superposition des courbes montrées à la figure 13.

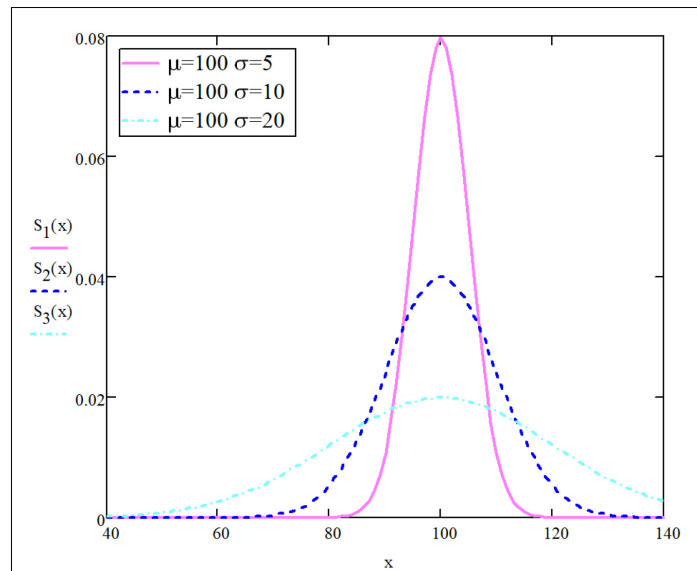


Figure 13 : Fonction de densité de probabilité de trois variables normales

On remarque le changement de la forme en cloche de la distribution. La moyenne de 100 est constante. Un petit écart type engendre une cloche serrée avec de meilleures performances. L'écart type de 5 est le plus intéressant pour faire une conception; à 10 comme écart type sur 100, le pic est bas et la dispersion est assez large. L'écart type de 20 sur une moyenne de 100 engendre une dispersion trop grande des résultats pour garder une zone sécuritaire de conception. C'est ce que démontre la suite de la démonstration.

Intégrons à présent la fonction de densité de probabilité de la force qui sollicite ces structures. Les données pour la charge sollicitant ces 3 sections d'épinettes indiquent que la moyenne et l'écart type sont respectivement:

$$\mu_{L1} = 70 \quad \sigma_{L1} = 7$$

L'équation de la distribution est donnée par :

$$L_1(x) = \frac{1}{\sigma_{L1}\sqrt{2\pi}} e^{\left[-1/2\left(\frac{x-\mu_{L1}}{\sigma_{L1}}\right)^2\right]}$$

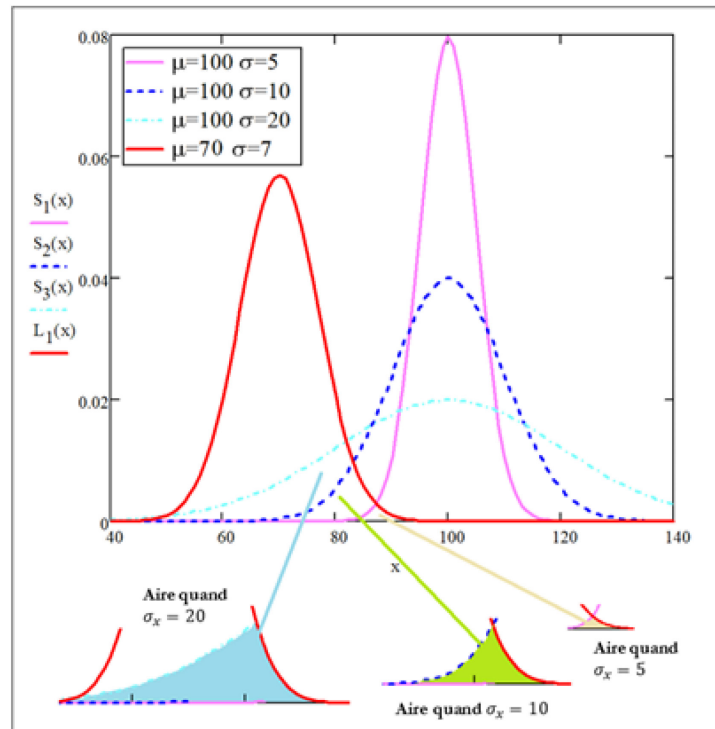


Figure 14 : Interférence de la charge sur la résistance quand σ_x augmente

Nous avons conçu la figure 14 pour montrer l'effet de la valeur de l'écart type sur la probabilité de défaillance. L'interférence de la charge est de plus en plus grande sur la résistance lorsque l'écart type augmente. L'aire formée sur l'intersection de la courbe de la charge sur la résistance quand l'écart type est égal à 5 est très petite et constitue une faible probabilité de défaillance. À $\sigma_x = 10$, l'aire est beaucoup plus importante. Quand $\sigma_x = 20$ la conception n'est tout simplement pas envisageable; presque la totalité des cas de chargement a une grande probabilité de dépasser la résistance de la structure.

La fonction cumulative de distribution pour quatre cas s'exprime par :

$$\Omega_1(x) = \int_{-\infty}^x S_1(x) dx$$

$$\Omega_2(x) = \int_{-\infty}^x S_2(x) dx$$

$$\Omega_3(x) = \int_{-\infty}^x S_3(x) dx$$

$$\Omega_L(x) = \int_{-\infty}^x L_1(x) dx$$

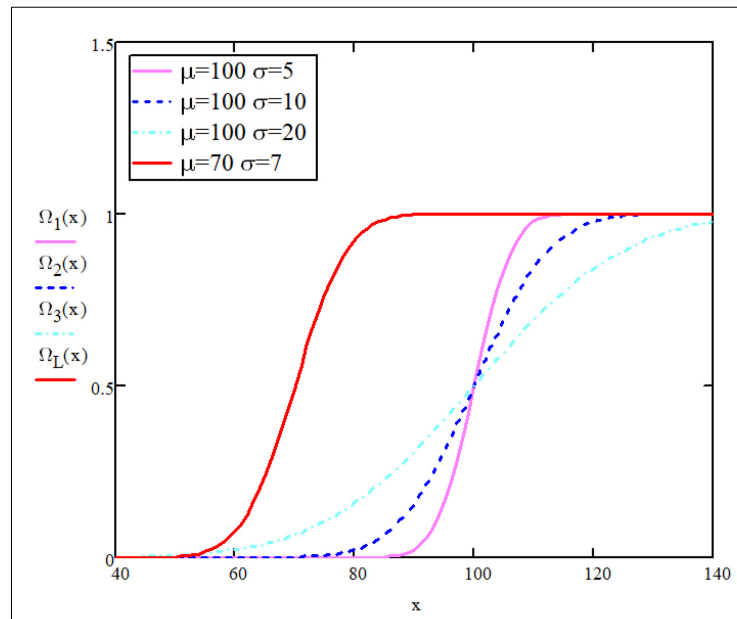


Figure 15 : Courbe des fonctions cumulatives de distribution

Ces intégrales sont montrées dans la figure 15. Les courbes cumulées sont de plus en plus étalées proportionnellement à l'augmentation de l'écart type

La qualité des données de distribution suivant la loi normale est donc, dans une certaine mesure, dépendante de la variation des moyennes qui, si elles sont trop écartées produiront des valeurs aberrantes de probabilité de fiabilité.

3.4 Fonction de répartition versus la Table de la loi normale

La loi normale est la loi de nombreux phénomènes naturels. En effet, avec toute la bonne volonté du monde, changement de température, changement de pression, bruit ambiant, erreurs de mesures, taux d'humidité, etc. les phénomènes naturels gardent une moyenne, mais subissent une variance plus ou moins grande. Laplace a constaté cette loi et l'a introduite en 1780; Gausse la popularisé en 1809, mais c'est Pearson en 1890 qui donna à ce phénomène le nom de la loi normale, comme si les autres distributions étaient, d'une façon ou d'une autre, anormales.

Une fois cette loi maîtrisée, avec son espérance et sa variance, il a été mathématiquement possible de la standardiser avec une moyenne nulle et un écart type unitaire, c'est la loi normale centrée réduite ou loi normale standard dont les tables de distributions sont disponibles dans la plupart des livres de probabilité et de fiabilités. L'aire de la fonction de densité étant égale à 1, la portion de cette aire à gauche de la limite z donne probabilité de défaillance.

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (3.22)$$

Par exemple, à la figure 16, pour un facteur de 1.64 quelle est la valeur de probabilité de défaillance? Eh bien, c'est l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.4 qui donne 0.9495. L'intégrale fournit encore plus de décimales :

$$\Phi(1.64) = \int_{-\infty}^{1.64} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.949497$$

Values of $\Phi(z)$ where $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx$ (Continued)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85992	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89616	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670

Figure 16 : Extrait de la table normale centrée réduite

La fiabilité étant $R = 1 - \Phi(z_1)$ alors $R = 1 - 0.949497 = 0.050503$

Des commandes prédéfinies des principaux logiciels exécutants des calculs numériques fournissent en une ou deux lignes de code le graphique et les résultats de ces distributions.

La figure 17 montre que pour une moyenne de 10 et d'écart type de 2, la probabilité de dépassement d'une limite de 5, se lit instantanément avec ces lignes de commandes sur Matlab :

$$x = [5, 18]$$

$$y_1 = \text{normspec}(x, 10, 2, \text{"outside"})$$

$$y_2 = \text{normspec}(x, 10, 2, \text{"inside"})$$

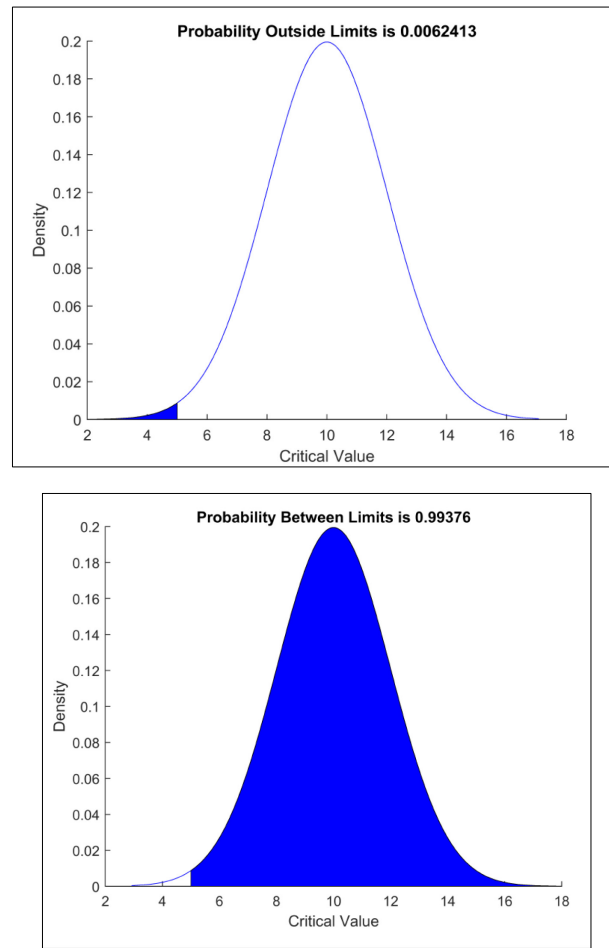


Figure 17 : Capture du tracé de densité normal sur Matlab

La table normale centrée réduite permet tout aussi bien de trouver, pour un phénomène donné, la fiabilité à un pourcentage quelconque. Tel est le propos de la prochaine section.

3.5 Fiabilité pour les facteurs de sécurité de 95%, 5% et 0.5%

L'industrie compare diverses performances et certaines valeurs caractéristiques finissent par être admises comme repères. Le pourcentage (%) d'acceptation ou de rejet d'un système est ainsi relié à certains facteurs de

sécurité. Les 5 % de l'aire sous la cloche formée par une distribution normale constituent le facteur de sécurité caractéristique, nommé, n_k :

$$n_k = \frac{S_{0.05}}{L_{0.95}} \quad (3.23)$$

Les nombreux inconvénients des réparations et le risque relié à un effondrement rendent les exigences de conception beaucoup moins permissibles. Ainsi sera désigné un facteur de sécurité de conception, nommé n^* :

$$n^* = \frac{S_{0.005}}{L_{0.95}} \quad (3.24)$$

La figure 18 illustre l'importance de ces facteurs de sécurité :

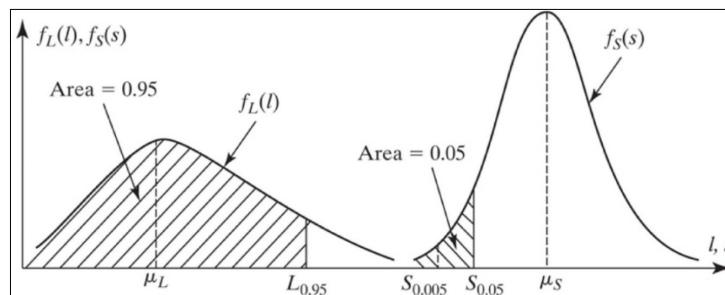


Figure 18 : Facteur de sécurité significative en fiabilité [29]

Avec la progression des connaissances sur le comportement des matériaux, et la complexité grandissante des bâtiments qui sont multiusages, de plus en plus hauts et de plus en plus élancés, les méthodes de conception ont évolué. Les méthodes d'analyse de fiabilité ont énormément progressé. Dans le prochain chapitre sera développée, l'étude fiabiliste par l'équilibre de la charge et de la résistance.

CHAPITRE 4. APPLICATION DES MÉTHODES DÉTERMINISTE ET PROBABILISTE

Passer de la théorie à la pratique pour réaliser un calcul par la méthode déterministe et ensuite la méthode probabiliste; tel est l'objet de ce chapitre.

4.1 Application de la Méthode déterministe

La méthode déterministe via le code national de construction et des normes de conception pour divers matériaux imposent de vérifier les structures pour leur comportement à l'état limite ultime et à l'état limite de service. La différence entre les deux est que, le dépassement de l'état limite ultime amène à la plastification des sections qui ne reprendront plus leur état initial même si la charge n'est plus appliquée. Cette déformation permanente peut amener à l'effondrement de l'ouvrage, donc risque de blessures et même des pertes en vie humaine. Tandis qu'à l'état limite de service, la structure performe encore dans sa zone d'élasticité, il n'y a aucun risque de rupture ou d'effondrement; mais elle ne remplit plus correctement sa fonction. La flèche dans un plancher qui fait craquer la finition, la vibration excessive d'une passerelle sont des exemples d'état limite qu'avec l'expérience ils sont établis en fonction de l'utilisation de l'espace.

Dans cette section les charges seront analysées de manière théorique selon l'esprit du Code National du Bâtiment Canada (version 2015). Par la suite, à travers de l'exemple précédent treillis à trois barres, la charge appliquée sera examinée selon des combinaisons. Les réactions d'appuis seront déterminées et la résistance de la structure sera vérifiée pour les deux états limites

4.1.1 Charges par la méthode déterministe : Treillis à trois bars (Voir §1.3)

Le Code National du Bâtiment définit pour toutes les provinces les charges et les combinaisons de celle-ci qu'il faut tenir comptent pour faire une conception. Des catégories sont formées : charge morte, surcharge, charge de neige, charge de vent et séisme. Le code fixe les coefficients à utiliser : la charge morte est à majorer de 25 %, soit un coefficient de 1.25, tandis que le coefficient de la charge vive est 1.5, celui du vent 1.4, le séisme reste 1.0. Il est fait obligation à l'ingénieur de combiner les charges mortes et les surcharges, par la suite de successivement ajouter la charge de neige et de vent. Une combinaison doit être considérée pour l'arrachement au sol de la structure. Il n'est plus permis de tenir compte des surcharges et de la charge de neige, la charge morte est réduite, coefficient 0.9 et 1.4 fois la charge de vent est ajoutée. Des combinaisons de torsion sont provoquées pour analyser la structure sous des forces sismiques. Les forces externes sont statiques et conservatrices. Le tableau 3 montre une proposition d'interprétation des coefficients et des combinaisons faites aux logiciels de calcul de structure pour produire des conditions d'enveloppe de sollicitation.

Tableau 1: Combinaisons des charges du Code national du bâtiment Canada (version 2015)

Application des combinaisons des charges du Code national du bâtiment Canada			
Condition	Nature	Charges principales	Charges d'action concomitantes
1	Charges permanentes : D	1.4 D	-
2	Surcharges : L	(1.25D ou 0.9D) + 1.5L	0.5S ou 0.4W
4	Neige : S	(1.25D ou 0.9D) + 1.5S	0.5L ou 0.4W
4	Vent : W	(1.25D ou 0.9D) + 1.4W	0.5L ou 0.4S
5	Séisme : E	1.0D + 1.0E	0.5L ou 0.4S

Tableau 2: Interprétation des coefficients

Nature	γ_{max}	γ_{min}	γ_s	γ_a	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_K
Charges permanentes : D	1.25	0.9	1	1.4			
Surcharges : L	1.5		1		1.5	0.5	1
Neige : S	1.5		1		1.5		1
Vent : W	1.4		1		1.4	0.4	1
Séisme : E				1			

Tableau 3: Proposition d'application des combinaisons des charges selon le CNB 2015

Condition	Nature	Charges permanentes	Surcharges	Séisme
État Limite Ultime	Cas 1	$\sum_{i \geq 1}^n G_i * \gamma_a$	-	-
État Limite Ultime	Cas 2 à 4	$\sum_{i \geq 1}^n G_i * \begin{cases} \gamma_{max} \\ \gamma_{min} \end{cases}$	$Q_i * \Psi_1 + Q_i * \Psi_2 * \Psi_K$	-
État Limite Ultime	Cas 5	$\sum_{i \geq 1}^n G_i * \gamma_s$	$\sum_{i \geq 1}^n Q_i * \Psi_2$	$\sum_{i \geq 1}^n S_i * \begin{cases} \gamma_a \\ -\gamma_a \end{cases}$
État Limite Service	Service	$\sum_{i \geq 1}^n G_i * \gamma_s$	$\sum_{i \geq 1}^n Q_i * \gamma_s$	-

Pour une application pratique de la méthode déterministe, le treillis étudié en élément finis sera calculé selon les normes canadiennes en vigueur. Le début sera les charges et leur combinaison selon les prescrits du Code national du Bâtiment Canada (CNBC).

Faut-il souligner, ici, que le Québec, à travers la Régie du Bâtiment du Québec, revoie à chaque cinq ans, à leur publication, le Code national du Bâtiment du Canada afin d'adapter plusieurs articles et sections à la réalité de la province. Ce code national révisé est le Code de Construction du Québec, qui a préséance sur le CNBC.

Les principales charges imposées par la partie 4 du CNBC pour les règles de calcul, sont :

- la charge permanente (D),
- la surcharge d'exploitation (L),
- une charge variable due au vent (W),
- une charge variable due à la neige (S),
- une charge rare due aux tremblements de terre (E).

Le treillis, n'étant pas conçu avec une surface de toit pouvant se soulever par la force du vent, il n'est pas nécessaire de considérer la combinaison de 0.9D. Pour la même raison, la charge permanente est inexistante ici, sinon que le poids propre du matériau. Cette charge est négligeable par rapport à la surcharge. Pour simplifier les calculs, la charge permanente sera négligée. La combinaison 1.25D est donc nulle.

Sans surfaces de murs qui résistent au vent et sans surface de toit sur laquelle de la neige s'accumulerait les combinaisons 1.4W et 1.5S sont nulles également.

Le treillis est donc conçu pour reprendre une surcharge ponctuelle appliquée au nœud 2. Cette surcharge va être pondérée pour le calcul à l'état limite ultime, 1.5S.

Le treillis doit être vérifié en état limite de service pour la flèche u_2 . Selon les prescrits du tableau D.1, Critères relatifs aux flèches, de la norme CSA S16 Règles de calcul des charpentes en acier, le dépassement doit être inférieure ou égale à $\frac{L}{360}$.

4.1.2 Calcul des sollicitations

La résistance des matériaux et l'analyse élémentaire des structures permettent de calculer les réactions d'appuis et de connaître les forces qui sollicitent chaque membrure dans une structure isostatique ou hyperstatique.

En service la flèche sera vérifiée sous la charge P non pondérée de 60 kN, appliquée au nœud 2 de l'exemple du treillis à trois barres. Mais pour la résistance à l'état limite ultime, les calculs seront effectués avec la charge pondérée.

$$P_f = 1.5P = 1.5 * 60 = 90kN \quad (4.1)$$

Les sections tubulaires carrées d'acier sont couramment utilisées pour fabriquer ce type de structure. Un HSS51x51x6.4 du matériau G40.21M-350W est retenu.

Les propriétés du matériau sont les suivantes :

$$E = 200000 \text{ MPa}$$

$$F_y = 350 \text{ MPa, Limite l'élasticité}$$

$$F_u = 450 \text{ MPa, Limite de plasticité}$$

$$A = 934 \text{ mm}^2, \text{ Aire de la section}$$

Les réactions d'appuis, selon la méthode des éléments finis, se calculent par la formule suivante.

$$\{R\} = [K] * \{U\} - \{F\} \quad (4.2)$$

Avec R , K , U et F égalent aux valeurs de l'équation 4.2.

R=								K	*	U	- F
93.4000	0	-93.4000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-93.4000	0	193.2534	66.4377	-66.8315	-33.4158	-33.0219	-33.0219	0	0	23/20	0
0	0	66.4377	49.7298	-33.4158	-16.7079	-33.0219	-33.0219	0	0	-67/20	-90
0	0	-66.8315	-33.4158	66.8315	33.4158	0	0	0	0	0	0
0	0	-33.4158	-16.7079	33.4158	16.7079	0	0	0	0	0	0
0	0	-33.0219	-33.0219	0	0	33.0219	33.0219	0	0	0	0
0	0	-33.0219	-33.0219	0	0	33.0219	33.0219	0	0	0	0

Le déplacement $-67/20 = 3.35$ mm lu à la quatrième ligne du vecteur U, est le déplacement sous la charge pondérée : 90 kN, pour l'état limite ultime. Sous la charge en service : 60 kN, cette valeur u_2 est égale à -2.23 mm et doit être vérifiée par la norme CAN/CSA S16-14 (section 8.4.4).

Les réactions montrées à la figure 19 sont ainsi trouvées.

$$\{R\} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.47 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -34.94 \\ 17.47 \\ -72.52 \\ 72.52 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

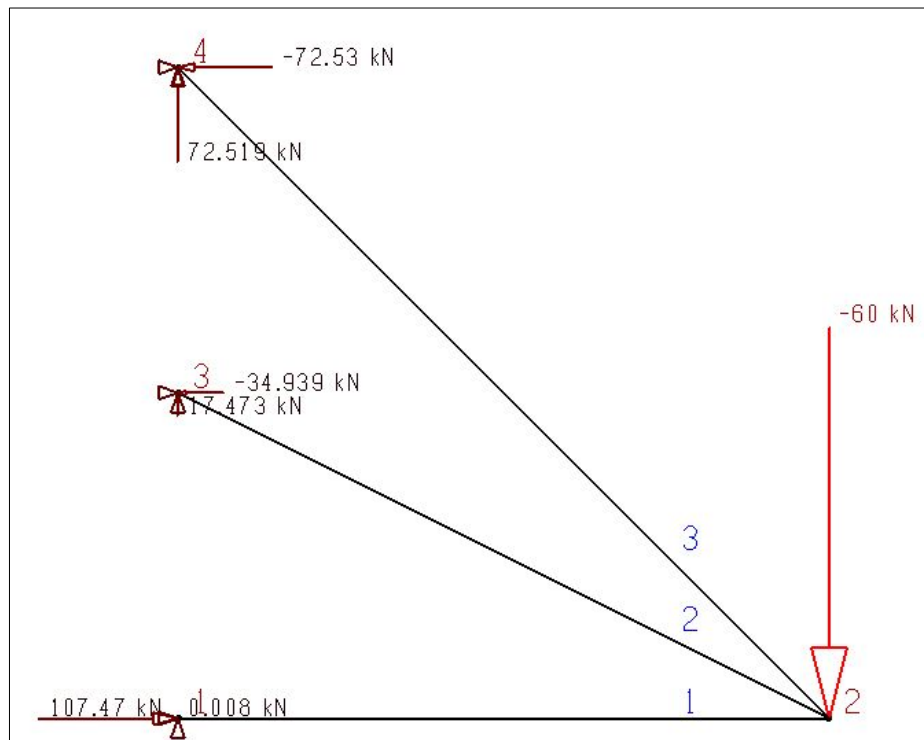


Figure 19 : Génération des résultats des réactions d'appuis

La résultante des forces axiales sur chaque membrure est résumée dans l'équation suivante.

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -107.47 \\ 39.06 \\ 102.57 \end{bmatrix}$$

La membrure 1 est la plus sollicitée. La structure sera calculée pour cette membrure, c'est-à-dire, la résistance de la section calculée selon la norme CAN/CSA S16-14 doit être inférieure à la compression de 107.47 kN.

4.1.3 Calcul de la résistance selon la norme CSA S16-14

Cette section permet d'appliquer des équations et des coefficients de la méthode déterministe pour calculer la résistance d'une structure.

Si d'un côté le Code national du Bâtiment fixe les coefficients pour pondérer les charges avec des facteurs de sécurité pouvant aller jusqu'à 5 pour les équipements de levage; de l'autre côté, les normes de conception vont inversement fixer des coefficients pour réduire la valeur de calcul de la résistance des matériaux. Le CSA S16 Règles de calcul des charpentes en acier impose ces coefficients de tenue en service : acier de construction 0.90, boulons 0.80, produits d'apport 0.67, etc. Il en est de même dans les règles de calcul des ouvrages en béton CSA-A23.3 ou les règles de calcul des charpentes en bois CAN/CSA-O86 la propriété du matériau est réduite par des coefficients. Le treillis à trois barres donne un exemple d'application de la méthode déterministe où un élément en acier doit être vérifié pour la stabilité. L'ensemble des sollicitations combinées doivent être divisées par la résistance de la pièce. Le résultat de la somme doit impérativement être inférieur à 1.0, car autrement la structure travaillerait au-delà de sa capacité qui est de 100%.

4.1.3.1. Élancement maximal, art. 10.4.2.1

La structure étant en compression, il faut s'assurer qu'il n'y aura pas de voilement local. Il se calcule par le rapport de la longueur sur le rayon de giration qui est limité à 200.

$$\frac{KL}{r}(\max) < 200 \quad (4.3)$$

$$\frac{1 * 2000}{18.13} = 111 < 200 \quad OK$$

4.1.3.2. Résistance à la compression seulement, art. 13.3.1, 13.3.2 et 13.3.3

Ce profilé à double symétrie doit offrir une résistance en compression comme suit :

$$C_r = \phi A F_y (1 + \lambda^{2n})^{\frac{-1}{n}} \quad (4.4)$$

Avec $n=1.34$ pour un profilé HSS, entre autres.

$$\lambda = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} \quad (4.5)$$

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (4.6)$$

L'équation s'écrit :

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{3.1416^2 * 200000}{\left(\frac{1 * 2000}{18.13}\right)^2} = 162.21$$

En remplaçant F_e par sa valeur dans l'équation 4.5, λ est obtenu :

$$\lambda = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} = \sqrt{\frac{350}{159.88}} = 1.47$$

La résistance C_r se calcul donc ainsi :

$$C_r = \phi A F_y (1 + \lambda^{2n})^{\frac{-1}{n}} = 0.9 * 934 * 350 (1 + 1.47^{2*1.34})^{\frac{-1}{1.34}} = 108.6 kN$$

La norme demande que

$$\frac{C_f}{C_r} \leq 1.0 \quad (4.7)$$

$$\frac{107.5}{108.6} = 98.96\% \leq 1.0$$

4.1.3.3. Résistance à la stabilité

La résistance de la section à l'état limite ultime pour la combinaison compression et flexion dans l'axe fort et l'axe faible est calculée selon prescrit de l'article 13.8.3 de la norme CAN/CSA S16-14_Règles de calcul des charpentes en acier dont un extrait est montré à la figure 20.

13.8.3 Résistance et stabilité des éléments : toutes les classes de sections, sauf les classes 1 et 2 de sections des éléments en I

Les éléments devant résister à des moments de flexion et à un effort de compression axiale doivent être dimensionnés pour satisfaire la relation suivante :

$$\frac{C_f}{C_r} + \frac{U_{1x}M_{fx}}{M_{rx}} + \frac{U_{1y}M_{fy}}{M_{ry}} \leq 1,0$$

où tous les termes sont définis à l'article 13.8.2.

La capacité de l'élément doit être examinée pour les cas suivants de la même façon qu'à l'article 13.8.2 :

- a) résistance de la section (éléments des cadres contreventés et éléments effilés seulement) ;
- b) résistance globale de l'élément ; et
- c) résistance au flambement en torsion-flexion.

De plus, les éléments de cadres contreventés doivent être conformes au critère suivant :

$$\frac{M_{fx}}{M_{rx}} + \frac{M_{fy}}{M_{ry}} \leq 1,0$$

où M_{rx} et M_{ry} sont définis à l'article 13.5 ou 13.6, selon le cas.

Figure 20 : Calcul résistance à la stabilité CSA S16-09

$$C_{r0} = \phi A F_y = 0.9 * 934 \text{ mm}^2 * 350 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 294.21 \text{ kN} \quad (4.8)$$

$$M_r = \phi Z F_y = 0.9 * 16400 \text{ mm}^3 * 350 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 5.17 \text{ kN} * \text{m} \quad (4.9)$$

$$13.8.3. a \quad \frac{C_f}{C_{r0}} + \frac{M_{fx}}{M_{rx}} + \frac{M_{fy}}{M_{ry}} \leq 1.0 \quad (4.10)$$

$$\frac{107.47}{294.21} + \frac{0}{5.17} + \frac{0}{5.17} = 36.5\% \leq 1.0 \quad OK$$

La stabilité dans l'axe fort ou l'axe faible se calcule par:

$$13.8.3. b \quad \frac{C_f}{C_{rx}} + \frac{M_{fx}}{M_{rx}} + \frac{M_{fy}}{M_{ry}} \leq 1.0 \quad (4.11)$$

$$\frac{107.47}{108.6} + \frac{0}{5.17} + \frac{0}{5.17} = 98.96\% \leq 1.0 \quad OK$$

4.1.3.4. Vérification de la flèche en service

Le déplacement maximal d'une poutre en porte-à-faux se calcule par l'équation 4.22 fournie par la loi de la résistance des matériaux montrée sur la figure 21.

$$\Delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (4.12)$$

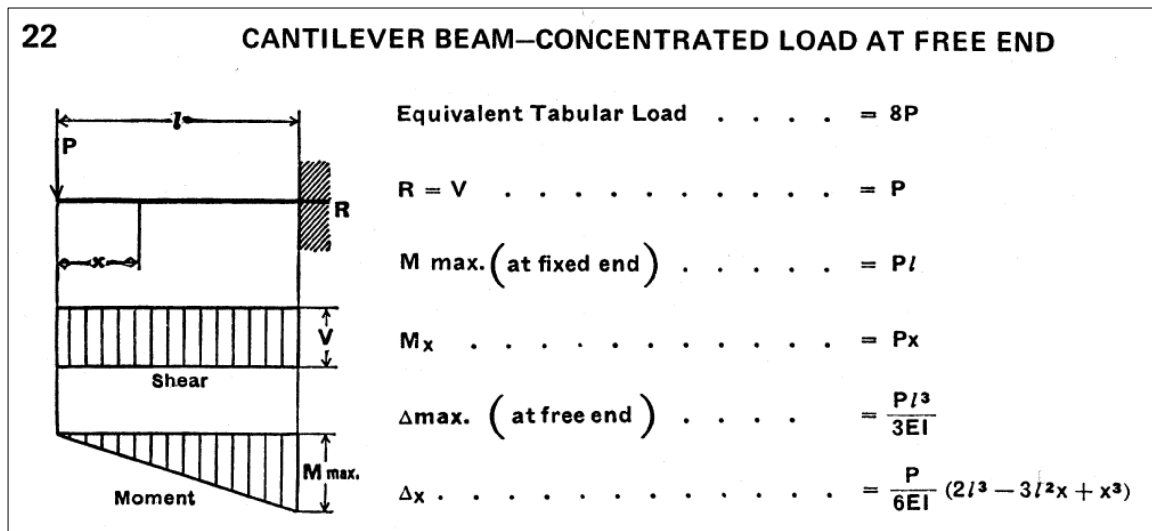


Figure 21 : Flèche d'une poutre en porte-à-faux (CISC-ICCA)

Dans le cas présent, les membrures L2 et L3 contribuent à la résistance au nœud 2 et pour cette raison l'équation 4.22 n'est pas applicable. Le modèle par éléments finis permet de calculer ce déplacement. L'équation 4.2 se réécrit :

$$\{u_{red}\} = [K_{red}]^{-1} * [F_{red}] = \begin{bmatrix} 193.25 & 66.44 \\ 66.44 & 49.73 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77 \\ -2.23 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Le déplacement est dans le même sens que la charge. Ils tendent vers le bas. C'est ce qu'indique le signe négatif. La valeur absolue du déplacement sera utilisée pour la suite des travaux.

$$u_2 = 2,23 \text{ mm}$$

$$\Delta_{limite} = \frac{L}{360} = \frac{2000}{360} = 5.55mm \quad (4.14)$$

La valeur de u_2 obtenue par la méthode des éléments finis, équation 4.13 est de 2.23 mm qui est inférieur à 5.55 mm. Donc, la membrure est conforme aux normes.

Le calcul déterministe est en grande partie pensé pour des membrures qui travaillent dans leur domaine d'élasticité [32]. Les théories sont beaucoup plus compliquées lorsque la structure doit performer sous une certaine plasticité.

Une petite lumière verte ou rouge, dans la calculatrice d'acier de SAFI, figure 22, indique au concepteur si le taux sollicitation est inférieur ou supérieur à la résistance de la section.

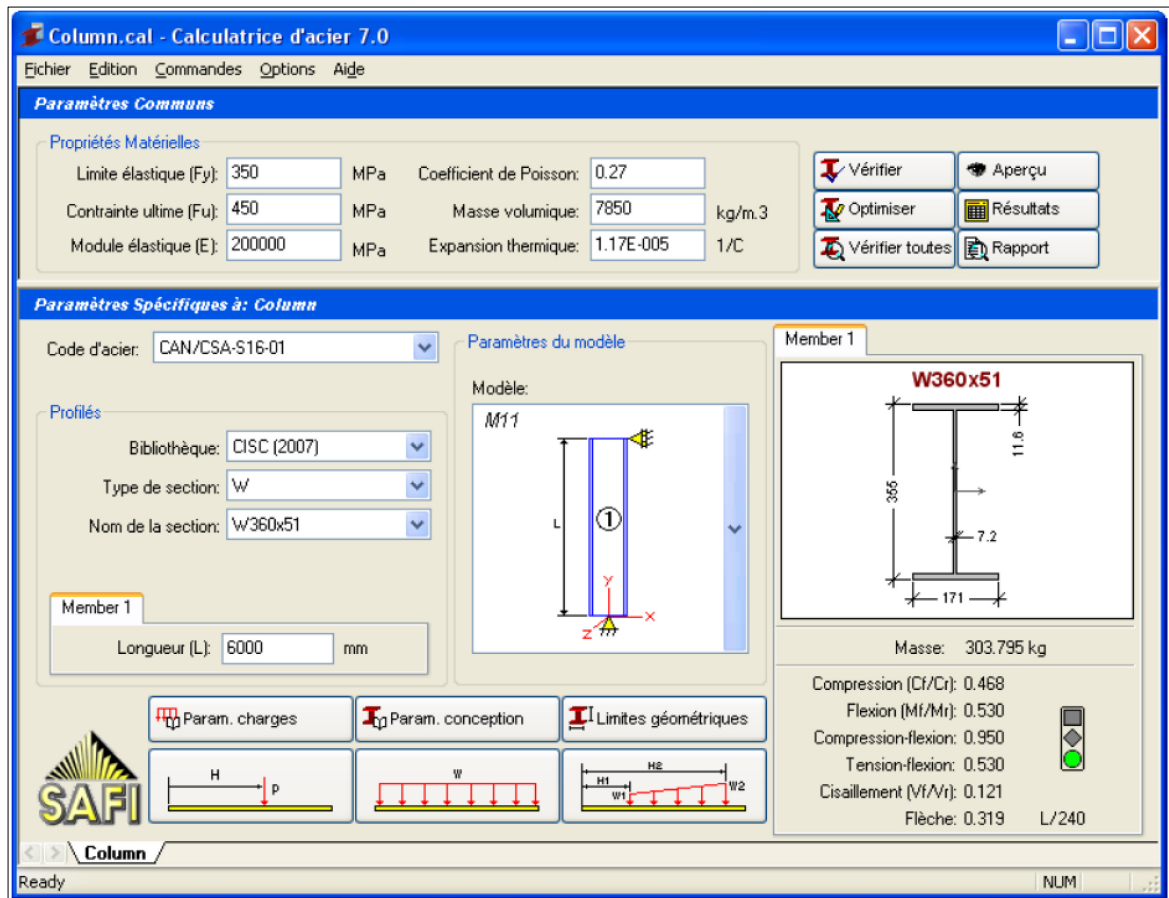


Figure 22 : Calculatrice d'acier de SAFI

(Manuel de référence Calculatrice d'acier 8.0 Société Informatique SAFI Inc. 1986-2014)

4.2 Application de la Méthode probabiliste

La méthode probabiliste pallie les défauts de la méthode déterministe. C'est l'objet de la section suivante avec l'exemple du treillis. Dans cette méthode, les combinaisons d'incidents ou d'erreurs humaines pouvant produire une défaillance unique ou multiple sont considérées avec leur probabilité respective et évaluées de manière très réaliste.

4.2.1 L'expression du déplacement sans la force P

La charge doit suivre une distribution probabiliste (Normale, Log Normale, Exponentielle...) avec une moyenne et un écart type.

Le calcul par la méthode des éléments finis, a donné l'expression du déplacement suivant :

$$u_2 = \frac{3.28L_1}{AE}P \quad (1.35)$$

Les valeurs numériques suivantes sont utilisées pour calculer l'expression du déplacement: $L_1 = 2000mm$, $A = 934mm^2$ et $E = 200000 \frac{N}{mm^2}$

Nous obtenons :

$$u_2 = \frac{3.28 * 2000}{934 * 200000}P = 0.000035118P \quad (4.15)$$

La moyenne retenue pour la charge P est 60 000 N et un écart type de 5 000 N.

4.2.2 Génération de la force P aléatoire

L'équation pour générer 1000 nombres aléatoires qui suivent la distribution normale avec une moyenne de 60 000 et un écart type de 5 000 sont intégrés dans les logiciels de calcul comme Matlab et Excel.

Il ne reste plus qu'à remplacer P par sa valeur dans l'expression de u_2 pour avoir la distribution normale du déplacement.

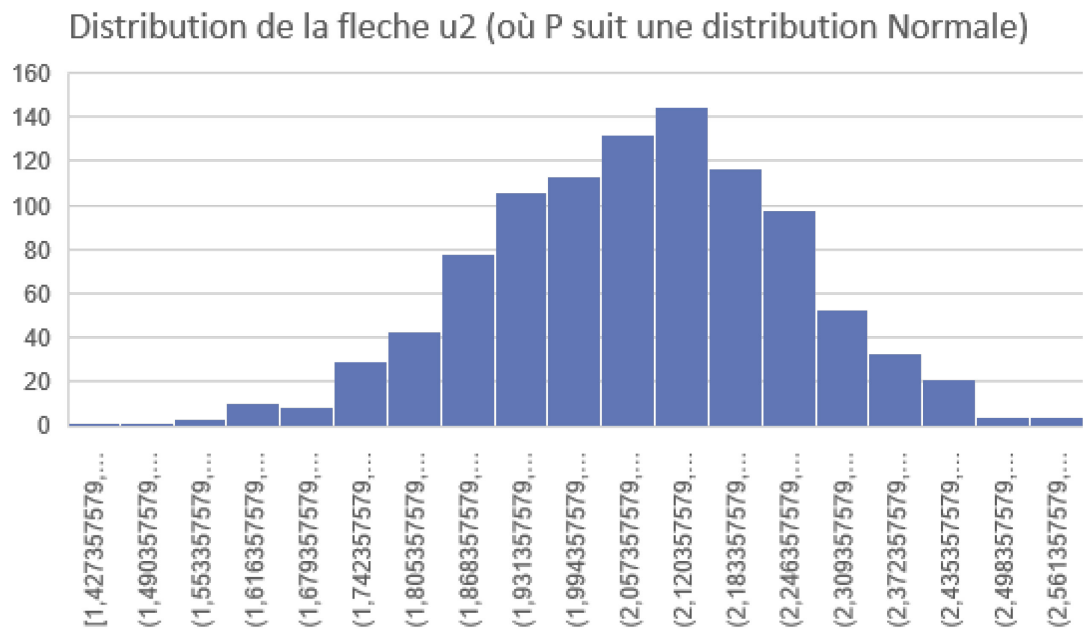


Figure 23 : Fonction de densité de probabilité

L'histogramme de la figure 23 n'a pas parfaitement la forme d'une cloche et le graphique change à chaque rafraîchissement de ces nombres P aléatoires. La question qui se pose est : comment être certain que ces données suivent la loi normale? [29] Pour répondre à cette question, un test de normalité sera effectué.

Pour utiliser ces données dans un calcul de fiabilité, il est obligatoire de s'assurer que le phénomène obéisse à une loi de distribution connue. Les principales distributions sont : la distribution normale, exponentielle, lognormal, Weibull, gamma, Rayleigh et uniforme. La structure suit la loi normale. Nous allons nous en assurer en réalisant un test sur les données.

4.2.3 Test de normalité des données

Le test de normalité est une méthode qui permet de confirmer si une série de données expérimentale suit une loi normale. Il s'agit d'appliquer le principe de la régression linéaire sur le nuage de point formé par la série de données pour obtenir la « meilleur » équation de droite [31]:

$$y = ax + b \quad (4.16)$$

Avec

$$a = \frac{(\sum_{i=1}^N x_i)(\sum_{i=1}^N y_i) - N(\sum_{i=1}^N x_i y_i)}{(\sum_{i=1}^N x_i)^2 - N(\sum_{i=1}^N x_i^2)}$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^N x_i)(\sum_{i=1}^N x_i y_i) - (\sum_{i=1}^N x_i^2)(\sum_{i=1}^N y_i)}{(\sum_{i=1}^N x_i)^2 - N(\sum_{i=1}^N x_i^2)}$$

C'est la technique des moindres carrés dans lequel la somme des carrés des écarts types des valeurs de y prédit par une ligne droite issue des données est minimisée. En utilisant les points $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, obéissant à la loi normale, pour trouver les constantes a et b . Les valeurs de y suit ainsi la loi normale centrée réduite.

Il est indispensable de porter le problème sur un graphique. Si les données suivent une loi normale; alors une droite est obtenue.

Pour ce problème, la technique de localisation des positions sera utilisée pour vérifier la normalité des données. La série de données expérimentale est représentée par t . Sur l'axe horizontal sont portés les t_i et sur l'axe vertical les $\Phi^{-1}(F(t))$ avec

$$F(t_i) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \quad (4.17)$$

Les t_i sont les déplacements u_2 de la simulation avec la distribution de P calculée sur Excel par la formule :

$$P = LOI.NORMAL.INVERSE(ALEA();60000;5000)$$

$$t_i = u_2 = 0.000035118 * LOI.NORMAL.INVERSE(ALEA(); 60000; 5000)$$

Pour l'axe vertical, sur Excel, $\Phi^{-1}(F(t))$ se calcul par la formule :

$$\Phi^{-1}(F(t)) = LOI.NORMAL.STANDARD.INVERSE\left(\frac{i - 0.3}{n + 0.4}\right)$$

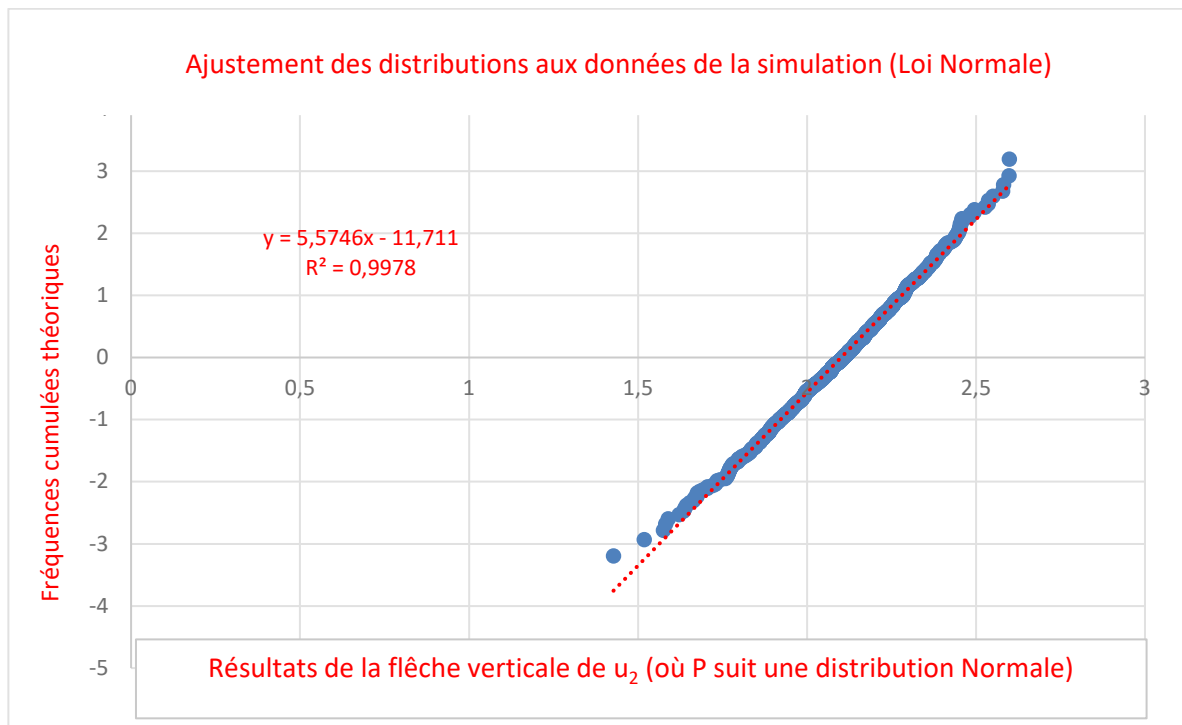


Figure 24 : Test de Normalité

À la figure 24 une droite est obtenue. Donc la fonction suit la loi normale. Il est donc permis de calculer la fiabilité R dans la probabilité de défaillance P_f , avec $P_f = 1 - R$

4.2.4 Analyse de la probabilité de défaillance

La méthode déterministe détaillée dans ce cas de treillis a fourni la limite en service de déplacement que la structure peut atteindre sans nuire à l'usage qui

a été prévu. Mais quelle est la probabilité que la structure se déforme jusqu'à cette défaillance? Quel est l'intervalle de confiance du système sans dépasser le seuil critique? La méthode déterministe ne peut pas répondre à ces questions. D'où l'apport de la méthode de probabilité qui est capable d'analyser des réponses aléatoires.

Les références 27 et 28 démontrent que dans les expressions de probabilité de fiabilité et de la défaillance, les unités de la force et de la charge doivent être cohérentes. Par exemple, les unités de la résistance à la compression d'un poteau et de la charge appliquée seront en **lb** ou en **N**. De même, les unités de pression seraient **lb/po²** ou **MPa** et celle des déplacements serait en **mm** ou en **po**. etc.

Le tableau 4 fournit plusieurs exemples pratiques.

Tableau 4: Cohérence des unités de résistance et de sollicitation

Résistance et sollicitation dans certains cas pratiques d'ingénierie		
Résistance	Charge	Description du système
Limite d'élasticité	Contrainte maximale induite	Structure ou machine soumise à une charge statique
Dégagement disponible	Déplacement maximal connu	Composant vibrant dans un assemblage
Vie cible	Vie restante	Système maintenu
Facteur d'intensité de stress	Dureté des fissures	Conception d'un système pour la fissuration
Taille de fissure critique	Taille croissante de la structure	Conception d'un système pour la fissuration
Vitesse de flottement	Vitesse de vol	Avion
Épaisseur de matériel	Profondeur de corrosion	Machine opérant dans un milieu corrosif
Fréquence naturelle	Fréquence de forçage	Machine vibrante
Capacité de refroidissement	Charge de refroidissement	Système de climatisation d'un bâtiment
Puissance de la machine	Puissance requise pour l'opération d'usage	Machine-outils

Appelons S , le déplacement maximal des membrures du treillis imposé par les normes. C'est leur résistance. Pour toute sollicitation engendrant des déplacements inférieurs à S , la structure se déformera dans l'intervalle de confiance et reprendra sa position initiale dès que la surcharge est enlevée. Et Appelons L , le déplacement effectivement généré sur le système chargé en fonction de la propriété du matériau et des sections des membrures. Il s'agit d'évaluer la probabilité que le déplacement trouvé par la simulation: L , excède le déplacement limite des normes : S .

Le vecteur de la variable de base dans l'axe des abscisses est fonction de la simulation et des normes; tandis que l'état limite dans l'axe des ordonnées est fonction de la distribution des deux variables. Pour le cas du treillis est assumée comme variable aléatoire seulement le déplacement statique obtenu par une charge statistique $N(60, 5)$ kN. Le déplacement u_2 , est le paramètre pour lequel la fonction de densité de probabilité PDF sera évaluée.

$$\{X\} = \{L, S\} \quad (4.18)$$

$$G(\{X\}) = S - L \quad (4.19)$$

La méthode de la transformation probabiliste, qui permet d'évaluer le PDF des variables aléatoires en multipliant la densité conjointe des arguments par le Jacobien de la fonction inverse donne les PDF exacts des déplacements de la norme et de la simulation.

$$R = P[X \geq 0] = P\left[z \geq z_1 = \frac{\mu_X}{\sigma_X}\right] = P\left[z \geq z_1 = \frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_L^2}}\right]$$

$$R = \int_{z_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}z^2)} dz = 1 - \Phi(z_1) \quad (4.20)$$

Avec

z_1 La limite inférieure de l'intégration pour calculer la fiabilité;

$$z_1 = \frac{1 - n}{\sqrt{\gamma_S^2 n^2 + \gamma_L^2}}$$

γ_S et γ_L les coefficients de variation

$$\gamma_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S} \text{ et } \gamma_L = \frac{\sigma_L}{\mu_L}$$

Et n le facteur de sécurité

$$n = \frac{\mu_S}{\mu_L}$$

La probabilité de défaillance pour la résolution numérique est l'intégrale de la fonction de densité de probabilité de u_2 sur un intervalle allant du déplacement limite jusqu'à l'infinie.

On peut imposer la borne inférieure de l'intégrale et utiliser l'index de fiabilité pour trouver la probabilité de défaillance. Tel est le concept qui sera détaillé dans la prochaine section.

4.2.5 Indice de fiabilité

Dénommé β , l'indice de fiabilité est défini dans les références 27 et 28, comme le rapport de la différence entre la moyenne sur le carré de l'écart type de la résistance et de la sollicitation. Elle représente le nombre d'écarts types entre la moyenne et le domaine de défaillance qui se situe à la valeur 0. Elle permet de rendre compte de la fiabilité d'un système. Elle se calcule par la relation:

$$\beta = \frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} \quad (4.21)$$

μ_L est la moyenne des déplacements par simulation (l'équivalent de la réalité)

σ_L est l'écart type des déplacements

μ_S est la moyenne des déplacements selon la norme à respecter. Dans ce problème, μ_S est égale à une constante

σ_S est l'écart type qui est égal à zéro dans ce problème

$\mu_S - \mu_L$ est la variable aléatoire X et

$\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}$ est l'écart type aléatoire : σ_X .

La fonction a une distribution normale. Une grande valeur de β indique un grand niveau de sécurité et une petite probabilité de défaillance.

Une simulation sur 1000 variables donne le résultat de ces équations.

Facteur de sécurité :

$$n = \frac{\mu_S}{\mu_L} = \frac{2.23}{2.1137} = 1.06$$

Indice de fiabilité :

$$\beta = \frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} = \frac{2.23 - 2.1137}{\sqrt{0 + 0.1774^2}} = 0.6555$$

Limites de l'intégration :

$$z_1 = -\beta = -0.6555$$

Fiabilité :

$$R = 1 - \Phi(z_1) = 1 - \Phi(0.6555) = 0.74392 = 74.39\%$$

Dans ce chapitre, avec l'application d'un treillis à trois barres, la méthode déterministe a été mise en œuvre par l'augmentation des charges, leur combinaison, le calcul des sollicitations qui se compare avec la résistance des sections abaissée par des facteurs de réduction. Par la suite, la méthode probabiliste a été exécutée avec l'expression du déplacement fourni par un modèle par éléments finis. En fonction de sa moyenne et de son écart-type, la charge aléatoire suivant la loi normale permet de trouver l'indice de fiabilité du système. Plus de membrures, plus de charges vont permettre de généraliser la méthode dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 5. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE ET APPLICATION DE CALCUL SUR UN PONT

5.1 Généralisation de la méthode avec le calcul d'un pont

Dans ce chapitre, la méthode fiabiliste étudiée pour une charge dans l'exemple du treillis sera généralisée avec l'application d'un pont. Les résultats par la méthode traditionnelle déterministe seront obtenus dans un premier temps, par la suite la méthode probabiliste y sera appliquée.

5.1.1 Pont : Propriétés et expression du déplacement

La fiabilité de déplacement du treillis à 3 barres complétée, un pont comptant treize membrures montrées à la figure 25 et sollicitées par trois charges ponctuelles sera analysé afin de généraliser la méthode.

Le treillis porteur du pont sera analysé par la méthode des éléments finis pour chercher l'expression du déplacement en fonction des charges appliquées, du module d'élasticité, des aires et des longueurs des sections.

L'analyse de cette structure montre que les membrures de cette ferme ne peuvent pas être sollicitées de manière uniforme et qu'il serait surdimensionné de garder partout les mêmes sections. En travaillant avec des tubes carrés standards, quatre (4) types de sections ont été retenus pour la conception. Ses sections sont lisibles dans la légende de la figure 26 montrant la connectivité du pont.

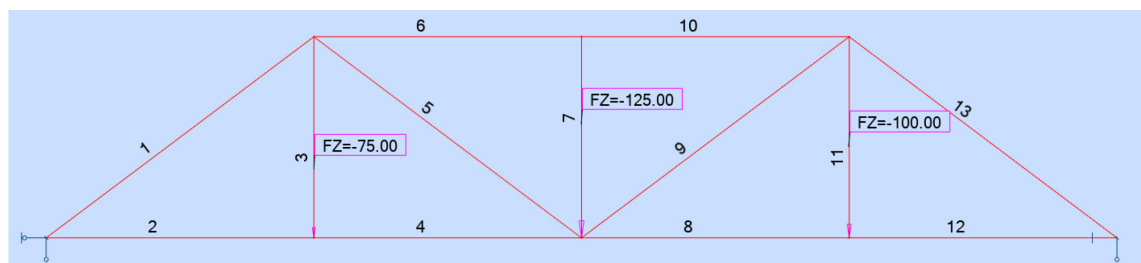
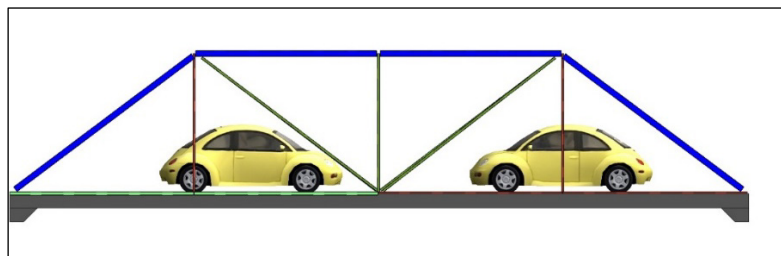
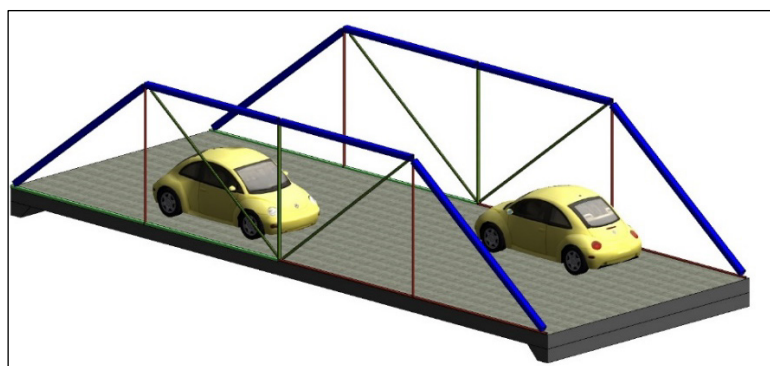
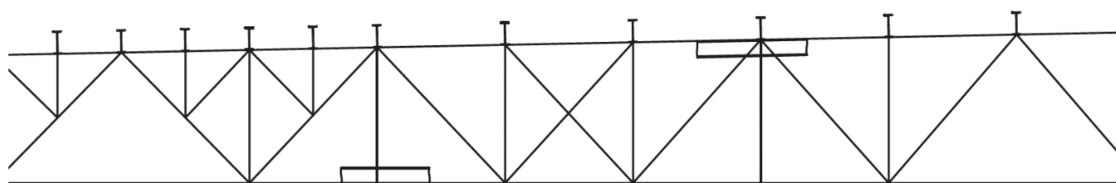


Figure 25 : Vue de fermes, du pont et de son treillis porteur

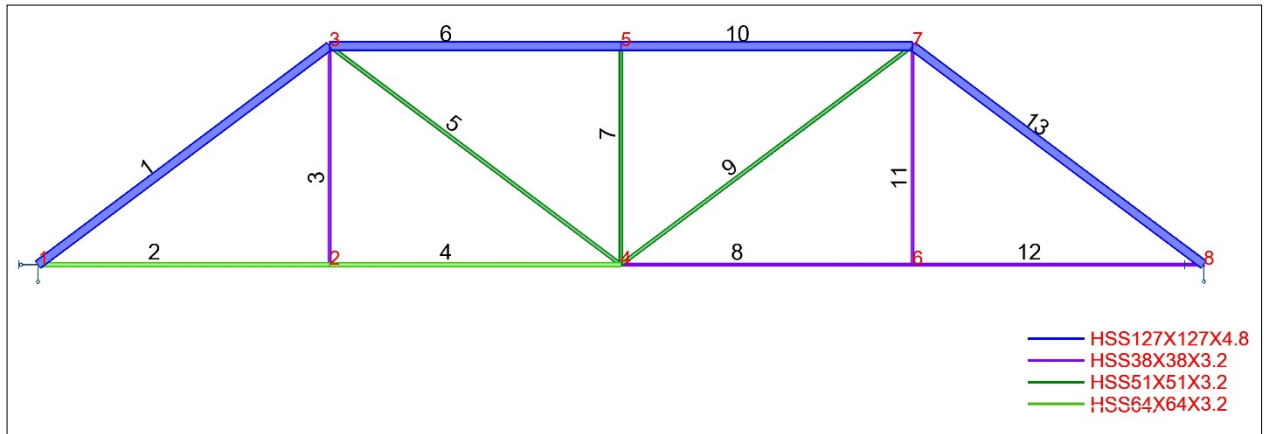


Figure 26 : Sections et connectivité du pont

La figure 26 montre aussi les barres, les nœuds et la connectivité qui sera utilisée pour trouver l'expression du déplacement du pont. Les coordonnées des huit nœuds et les treize barres du modèle de calcul par élément finis sont indiquées dans les tableaux 2 et 3:

Tableau 5: Connectivités des barres

Barres connectivités		
No	Début	Fin
1	1	3
2	1	2
3	2	3
4	2	4
5	3	4
6	3	5
7	4	5

8	4	6
9	4	7
10	5	7
11	6	7
12	6	8
13	7	8

Tableau 6: Coordonnées des nœuds

Nœuds Coordonnées		
No	x	y
1	0	0
2	4000	0
3	4000	3000
4	8000	0
5	8000	3000
6	12000	0
7	12000	3000
8	16000	0

Les sections les plus sollicitées, localisées au périmètre du pont ont une aire appelée A en mm^2 . Les autres sections, en fonction de A sont :

$$A_1 = A$$

$$A_2 = 0.33A$$

$$A_3 = 0.25A$$

$$A_4 = 0.18A$$

Il en est de même pour les charges, exprimées en fonction de P en Newton et dont la distribution est montrée à la figure 27. Les charges sont :

$$P_1 = P$$

$$P_2 = 1.25P$$

$$P_3 = 0.75P$$

Le module d'élasticité E est constant pour toutes les sections. Il s'exprime en $\frac{N}{mm^2}$ ou MPa .

Quant aux longueurs, elles suivent les règles du triangle "3 4 5" avec les côtés qui mesurent respectivement 3, 4 et 5 unités. Les longueurs sont :

$$L_1 = L$$

$$L_2 = 0.75L$$

$$L_3 = 1.25L$$

La matrice de rigidité globale réduite est donnée par:

$K =$

$$\begin{pmatrix} \frac{2A_2 E}{L_1} & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & 0 & -\sigma_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_6 & \sigma_3 - \sigma_1 & \sigma_8 & \sigma_1 & \sigma_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{11} & \sigma_3 - \sigma_1 & \sigma_7 & \sigma_1 & \sigma_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_5 & 0 & \sigma_8 & \sigma_1 & -\sigma_5 - \sigma_4 + \frac{32A_3 E}{25L_3} & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_8 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & \sigma_{10} & 0 & \sigma_2 + \frac{18A_3 E}{25L_3} & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_9 & 0 & 0 & 0 & \frac{2A_1 E}{L_1} & 0 & 0 & 0 & \sigma_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{2A_4 E}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11} & 0 & -\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_8 & -\sigma_1 & \sigma_9 & 0 & 0 & 0 & \sigma_6 & \sigma_1 - \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_{10} & 0 & 0 & 0 & -\sigma_{11} & \sigma_1 - \sigma_3 & \sigma_7 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\sigma_1 = \frac{12A_3 E}{25L_3}$$

$$\sigma_7 = \frac{9A_1 E}{25L_3} - \sigma_{10} - (-\sigma_{11})$$

$$\sigma_2 = \frac{A_3 E}{L}$$

$$\sigma_8 = -\frac{16A_3 E}{25L_3}$$

$$\sigma_3 = \frac{12A_1 E}{25L_3}$$

$$\sigma_9 = -\frac{A_1 E}{L_1}$$

$$\sigma_4 = -\frac{A_4 E}{L_1}$$

$$\sigma_{10} = -\frac{9A_3 E}{25L_3}$$

$$\sigma_5 = -\frac{A_2 E}{L_1}$$

$$\sigma_{11} = \frac{A_4 E}{L_2}$$

$$\sigma_6 = -\sigma_9 + \frac{16A_1 E}{25L_3} - \sigma_8$$

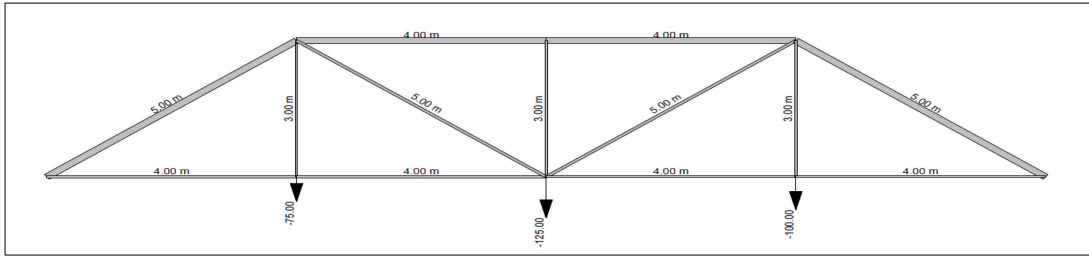


Figure 27 : Charges retenues pour le calcul numérique

L'expression du déplacement dans le sens gravitaire au centre du système peut s'exprimer en fonction des différents types de charges, P , de sections, A , et de longueurs, L , des barres. La déformée du treillis est montrée à la figure 28.

- En fonction de P_1 à P_3 , A_1 à A_3 et L_1 à L_3 , l'expression du déplacement est :

$$u_{4y} = -\frac{P_1(32L_1 + 25L_3)}{18A_1E} - \frac{P_2(25A_1 \cdot L_3 + 64A_3L_1 + 25A_3 \cdot L_3)}{18A_1A_3E} - \frac{P_3(32L_1 + 25L_3)}{18A_1E} \quad (5.1)$$

$$\text{Numériquement, } u_{4y} = -18.69\text{mm}$$

- En fonction de P_1 à P_3 , A_1 à A_3 et L , l'expression est :

$$u_{4y} = -\frac{253LP_1}{72A_1E} - \frac{(125A_1 + 381A_3)LP_2}{72A_1A_3E} - \frac{253LP_3}{72A_1E} \quad (5.2)$$

$$\text{Numériquement, } u_{4y} = -18.69\text{mm}$$

- En fonction de P_1 à P_3 , A et L , l'expression est :

$$u_{4y} = -\frac{253LP_1}{72AE} - \frac{881LP_2}{72AE} - \frac{253LP_3}{72AE} \quad (5.3)$$

Numériquement, $u_{4y} = -18.81\text{mm}$

- En fonction de P , A , et L , l'expression est :

$$u_{4y} = -\frac{193LP}{9AE} \quad (5.4)$$

Numériquement, $u_{4y} = -14.11\text{mm}$

Avec, pour les résultats numériques :

$$A_1 = A = 2280 \text{ mm}^2$$

$$P_1 = P = -100\,000 \text{ N}$$

$$L_1 = L = 4000 \text{ mm}$$

$$E = 200\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

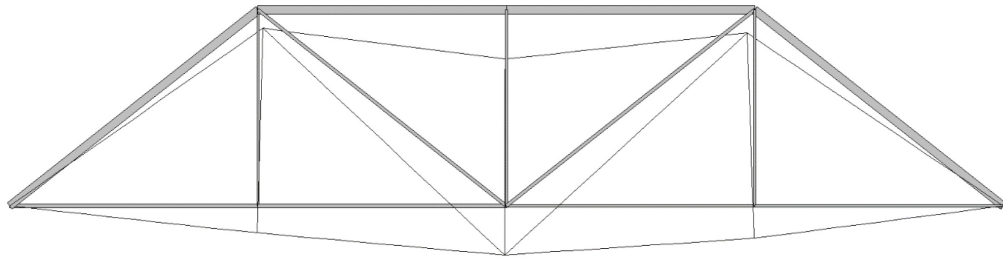


Figure 28 : Déplacement maximale du pont

5.1.2 Calcul de la fiabilité du pont

L'expression de déplacement avec la force P comme variable aléatoire sera retenue pour cette vérification.

$$u_{4y} = -\frac{193LP}{9AE} = \frac{193 * 4000 * P}{9 * 2280 * 200\,000} \quad (5.5)$$

$$u_{4y} = -0.00018811 P \quad (5.6)$$

La charge P s'applique suivant la loi normale d'une moyenne de 100 000 et d'un écart type de 8 000.

Pour générer 1000 variables aléatoires de P , la commande s'écrit, sur Mathcad par exemple :

$$P = \text{rnorm}(1000, 100000, 8000) \quad (5.7)$$

P est remplacée par sa valeur dans l'expression de déplacement, obtenant ainsi 1000 valeurs de déplacement aléatoires montrées à la figure 29. Un test de normalité réalisé sur ces données montre que tous les points tendent vers une ligne droite. Donc, la distribution suit la loi normale.

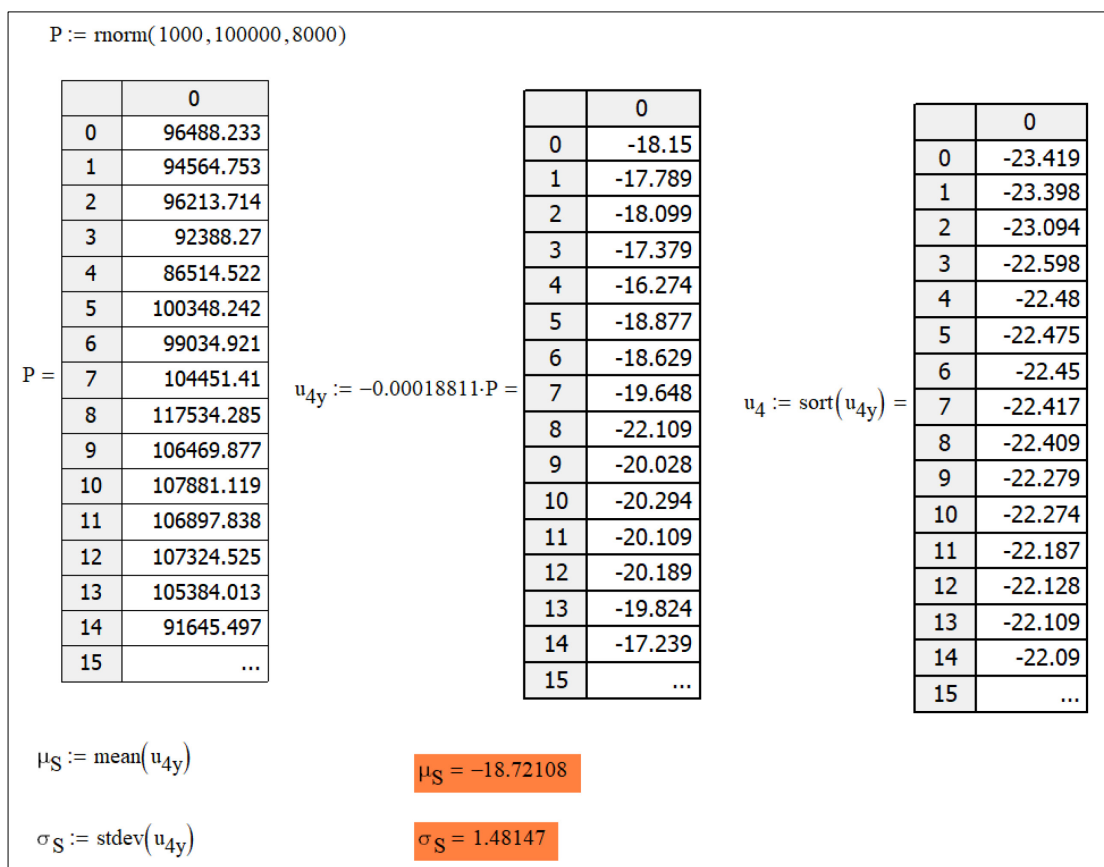


Figure 29 : Génération de variables aléatoires, calcul: moyenne et écart type sur Mathcad

La moyenne: -18.786 mm, et l'écart type: 1.475 mm pour la résistance au déplacement du pont sont ainsi déterminés. Des facteurs de sécurité spécifique reliés à des pourcentages d'acceptation ou de rejet de la conception peuvent être déterminés sans difficulté grâce à des fonctions intégrées dans la plupart des logiciels de calcul numérique. Le taux d'acceptation à 75%, 90% et 95% sont représentés dans la figure 30 des facteurs de sécurité spécifiques.

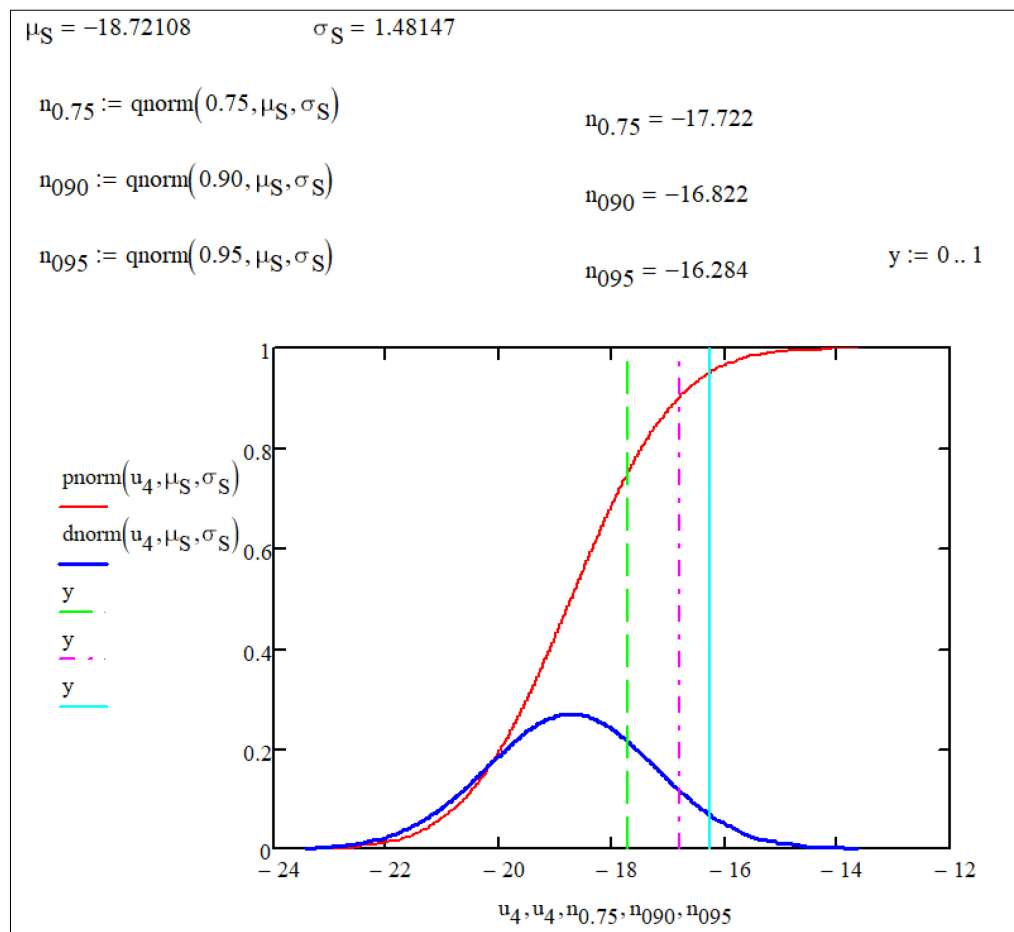


Figure 30 : Facteurs de sécurité

Les chargements les plus courants attendus sur le pont engendreront un déplacement moyen de 12 mm sur le pont, avec un écart-type de 1.3 mm.

$$\mu_L = 12mm$$

$$\sigma_L = 1.3mm$$

Pour la fonction d'état limite $X = S - L$, il est possible de trouver la moyenne et l'écart type afin de déterminer l'indice de fiabilité. Des extraits de ces calculs sont montrés sur la figure 31, 32 et 33.

$\mu_S = -18.72108$	$\sigma_S = 1.48147$	
$\mu_L := -12$		$\mu_L = -12$
$\sigma_L := 1.3$		$\sigma_L = 1.3$
$\mu_X := \mu_S - \mu_L$		$\mu_X = -6.72108$
$\sigma_X := \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}$		$\sigma_X = 1.97098$
$\beta := -\frac{\mu_X}{\sigma_X}$		$\beta = 3.41002$

Figure 31 : Calcul de l'indice de fiabilité de la fonction d'état limite

L'indice de fiabilité β peut également se calculer avec le facteur de sécurité n et les coefficients de variations γ_S et γ_L .

L'indice de fiabilité connu, c'est possible d'utiliser les tables de la loi normale centrée réduite pour trouver la fiabilité et la probabilité de défaillance de l'ouvrage. Pour un meilleur contrôle, il est réaliste d'écrire directement l'expression intégrale de la probabilité de défaillance permise et observer les résultats :

$$\Phi_\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\beta=3.41002}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0.999675$$

$n := \frac{\mu_S}{\mu_L}$	$n = 156.009\%$
$\gamma_S := \frac{\sigma_S}{\mu_S}$	$\gamma_S = -0.07913$
$\gamma_L := \frac{\sigma_L}{\mu_L}$	$\gamma_L = -0.10833$
$z_L := \frac{1 - n}{\sqrt{\gamma_S^2 \cdot n^2 + \gamma_L^2}}$	$z_L = -3.41002$

Figure 32 : Indice de fiabilité en fonction du facteur de sécurité

De manière complémentaire, la fiabilité est donnée par :

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\beta=3.41002} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0.000325$$

$\text{Prob_defaillance} := \text{pnorm}(\beta, 0, 1)$	$\text{Prob_defaillance} = 0.999675$
$\text{fiabilite} := 1 - \text{Prob_defaillance}$	$\text{fiabilite} = 0.00032$ $\text{fiabilite} = 0.03\%$
$P_f := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\beta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} dx$	$P_f = 0.99968$
$\Phi_Z := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-\beta} e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} dx$	$\Phi_Z = 0.000325$

Figure 33 : Probabilité de défaillance et fiabilité via l'expression intégrale

Par constat, la valeur minimum de déplacement du millier de données aléatoires est de -23.419 . Un intervalle x , variant de -24 à -4 , est créé à la figure 34, dans lequel sera observée la distribution des données de la résistance et de la charge suivant les expressions 3.12 et 3.13 [31].

$$\Phi_{S(x)} = \frac{1}{\sigma_S \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_S}{\sigma_S} \right)^2} \quad (5.8)$$

$$\Phi_{L(x)} = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_L}{\sigma_L} \right)^2} \quad (5.9)$$

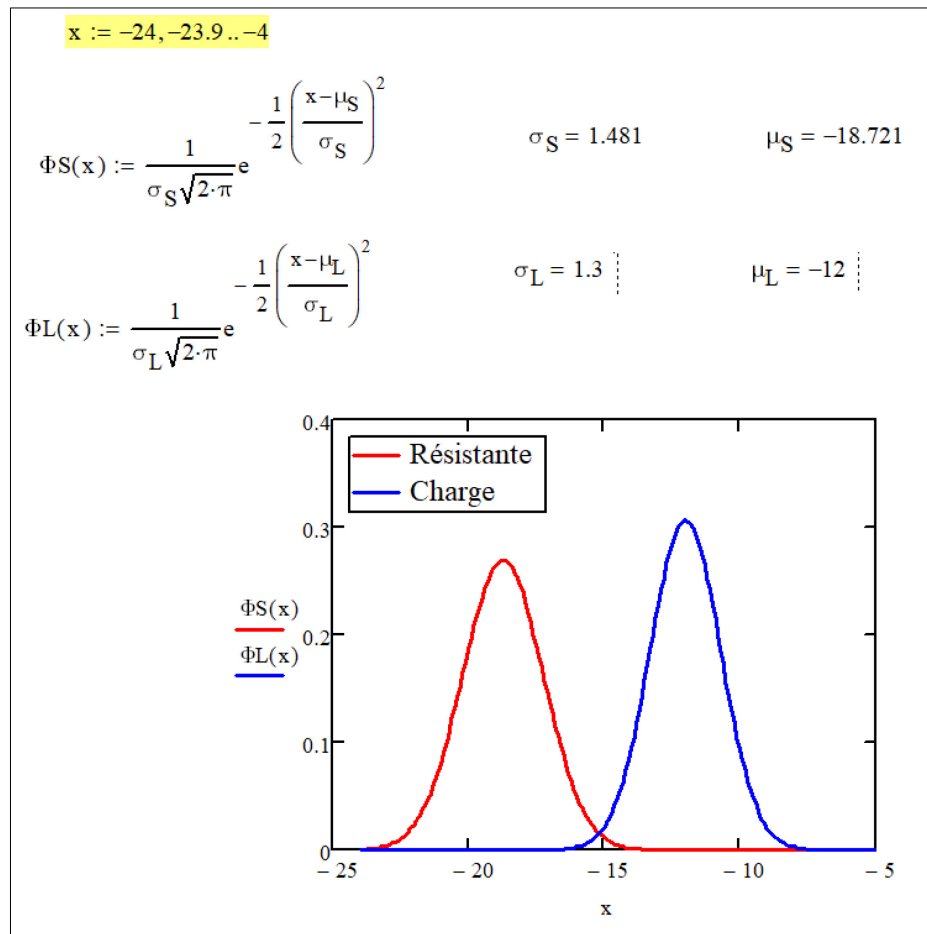


Figure 34 : Interférence des distributions de S et de L du pont

À la figure 34, la courbe en forme de cloche de la probabilité de la fonction de densité de la résistance est à droite et est, à plus de 95%, éloignée de fonction de densité de la charge. La zone d'interférence où la charge est supérieure à la résistance constitue la probabilité de défaillance de la structure.

5.2 Application de calcul déterministe et fiabiliste des barres du pont

5.2.1 Résultat des calculs déterministes des barres constitutives du pont

Le treillis du pont, conformément aux règles de l'art, est construit à partir de barres triangulées et est chargé seulement aux nœuds. Donc, les treize membrures du pont ne peuvent subir que des contraintes de compression et de traction.

Avec les mêmes, la même géométrie, les mêmes distributions de charges, les barres vont être connectées aux nœuds en suivant le sens des aiguilles d'une montre. Cela a pour avantage de réduire les risques d'erreurs dans l'inversion des matrices lors de l'exécution des codes par divers logiciel d'analyse par éléments finis. Les nouvelles coordonnées des nœuds et la connectivité des barres sont indiquées dans les tableaux 4 et 5.

Les réactions d'appuis, les déplacements des nœuds et les efforts internes des barres sont calculés par le modèle par éléments finis et contre-vérifiés par le logiciel de calcul de structure (ADA) Advance Design America. Les résultats de ce dernier logiciel sont montrés en partie dans les figures 35, 36 et 37.

Les valeurs des réactions d'appuis et des déplacements aux nœuds dans la direction gravitaire y et la direction latérale x sont données dans le tableau 6; tandis que le tableau 7 pour les treize barres indique la connectivité, la section, la longueur, l'inclinaison et les forces axiales.

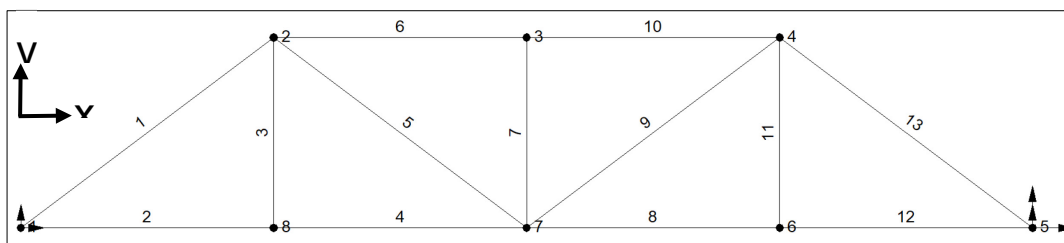
Le déplacement est maximal au centre du treillis aux nœuds 3 et 7 d'une valeur de 35.83 mm. La corde supérieure du treillis est la plus sollicitée par les charges. Les barres 6 et 10 résistent à une force interne de compression de 283.73 kN tandis qu'à la barre 13 cette force est moindre : 259.91 kN, mais plus élancée sur une longueur de flambement de 5 mètres.

Tableau 7: Coordonnées des nœuds sens horaire (unités en mm)

Nœuds Coordonnées		
No	x	y
1	0	0
2	4000	3000
3	8000	3000
4	12000	3000
5	16000	0
6	12000	0
7	8000	0
8	4000	0

Tableau 8: Connectivités des barres sens horaire

Barres connectivités		
No	Début	Fin
1	1	2
2	1	8
3	8	2
4	8	7
5	2	7
6	2	3
7	7	3
8	7	6
9	7	4
10	3	4
11	6	4
12	6	5
13	4	5

**Figure 35 : Identification des nœuds et barres**

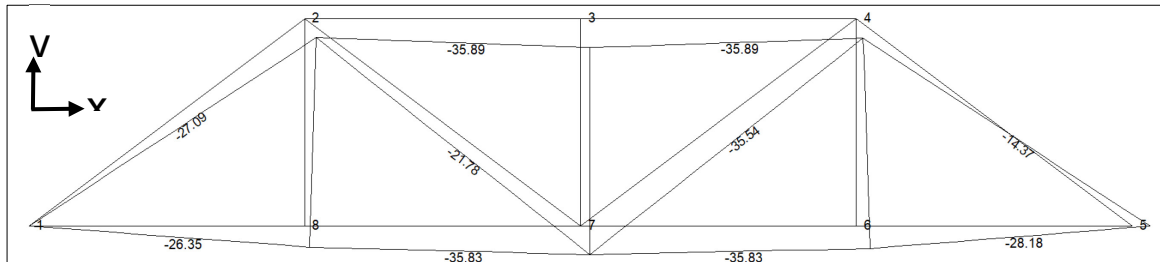


Figure 36 : Déplacement des nœuds (unités en mm)

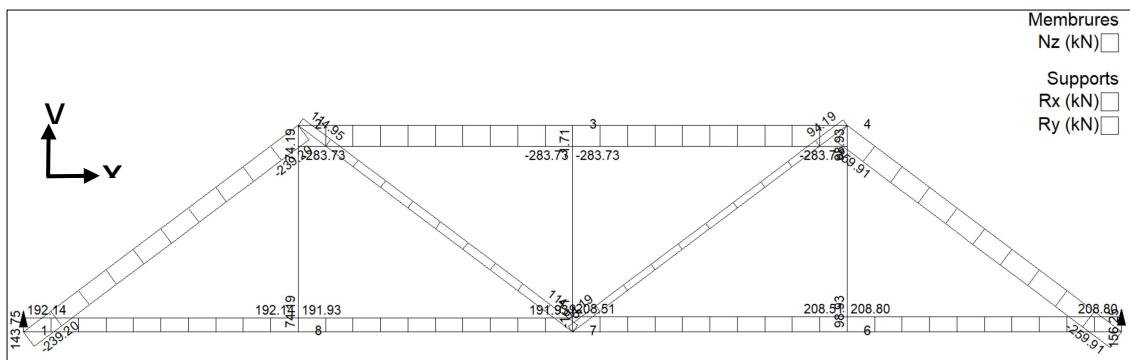


Figure 37 : Efforts internes des barres

Tableau 9 : Réactions d'appuis et déplacement aux nœuds

Numéro	R _x	R _y	Dépl. x	Dépl. y
	kN	kN	mm	mm
1	0,00	143,75	0,00	0,00
2	0,00	0,00	13,9	-23,42
3	0,00	0,00	11,2	-35,89
4	0,00	0,00	8,4	-24,27
5	0,00	156,25	22,7	0,00
6	0,00	0,00	17,1	-28,18
7	0,00	0,00	11,5	-35,83
8	0,00	0,00	5,7	-26,35

Tableau 10: Efforts internes des barres

Numéro	Numéro	Numéro	Section	Aire	Inertie	Longueur	Inclinaison	Axial Nz
	Noeud i	Noeud j					dy/(dx,dz)	
				mm ²	mm ⁴	m	°	kN
1	1	2	HS127x127x4.8	2280	5.60 * 10 ⁶	5,00	36,87	-239,20
2	1	8	HS64x64x3.2	741	0.441 * 10 ⁶	4,00	0,00	192,14
3	8	2	HS38x38x3.2	418	0.0822 * 10 ⁶	3,00	90,00	74,19
4	8	7	HS64x64x3.2	741	0.441 * 10 ⁶	4,00	0,00	191,93
5	2	7	HS51x51x3.2	580	0.214 * 10 ⁶	5,00	36,87	114,95
6	2	3	HS127x127x4.8	2280	5.60 * 10 ⁶	4,00	0,00	-283,73
7	7	3	HS38x38x3.2	418	0.0822 * 10 ⁶	3,00	90,00	-1,71
8	7	6	HS64x64x3.2	741	0.441 * 10 ⁶	4,00	0,00	208,51
9	7	4	HS51x51x3.2	580	0.214 * 10 ⁶	5,00	36,87	94,18
10	3	4	HS127x127x4.8	2280	5.60 * 10 ⁶	4,00	0,00	-283,73
11	6	4	HS38x38x3.2	418	0.0822 * 10 ⁶	3,00	90,00	98,93
12	6	5	HS64x64x3.2	741	0.441 * 10 ⁶	4,00	0,00	208,80
13	4	5	HS127x127x4.8	2280	5.60 * 10 ⁶	5,00	36,87	-259,91

La résistance de la barre 13 se calcule selon la norme CSA S16 par l'équation 4.8.

$$\text{Résistante en compression de la barre } C_r = \phi A F_y (1 + \lambda^{2n})^{-\frac{1}{n}}$$

Force interne de compression $C_f = 259.91kN$

Les variables de cette équation se calculent comme suit :

*HSS 127 * 127 * 4.8*

Aire $A = 2060mm^2$

rayon de giration $r = 49.8mm$

Limite d'élasticité $F_y = 345MPa$

Module d'élasticité $E = 200000MPa$

Longueur $L = 5000mm$

Facteur de longueur effective ou équivalente, Rotule – Rotule, $K = 1.0$

$$n = 1.34$$

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{3.1416^2 * 200000}{\left(\frac{1 * 5000}{49.8}\right)^2} = 195.82$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} = \sqrt{\frac{345}{195.82}} = 1.33$$

$$C_r = \phi A F_y (1 + \lambda^{2n})^{-\frac{1}{n}} = 0.9 * 2060 * 345 (1 + 1.33^{2*1.34})^{-\frac{1}{1.34}} = 272.6kN$$

$$\frac{C_f}{C_r} = \frac{259.9}{272.6} = 95\% \leq 1.0 \quad OK$$

Le taux de sollicitation de la barre 13 est de 95% contre-vérifié par les résultats du logiciel de calcul de structure montré à la figure 38. Le taux de sollicitation de toutes les barres est indiqué dans la figure 38. En raison des différents types de sections utilisées dans le treillis, un certain équilibre est maintenu entre les dimensions des sections des barres et les efforts internes à reprendre. Par exemple, la barre 11 qui est un montant devant reprendre un effort interne de

seulement 98.93 kN n'est pas surdimensionnée; car sa section est un HSS 38x38x3.2 travaillant de manière sécuritaire à 90.28% de sa capacité.

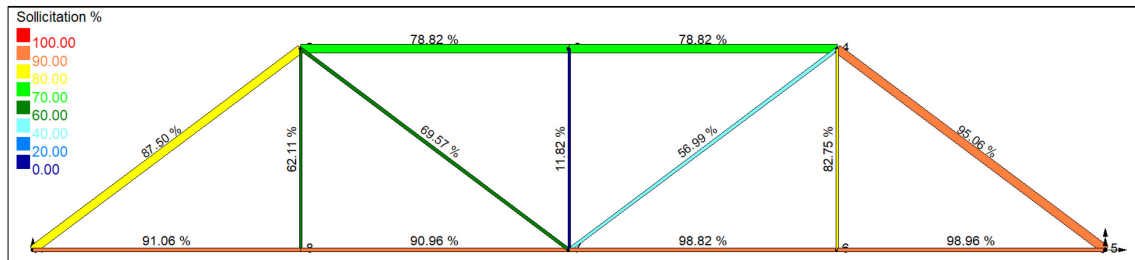


Figure 38 : Taux de sollicitation des barres selon la norme CSA S16

5.2.2 Résultat des calculs probabilistes des barres constitutives du pont

À présent, il est faisable de procéder au calcul probabiliste des barres du treillis pour la fonction d'état limite de flambage. La barre 13 sera utilisée pour cet exemple d'application.

L'expression de la fonction est que la contrainte de résistance d'une barre doit être supérieure ou égale à la contrainte induite par les forces axiales appliquées.

Appelons P la force interne due aux charges appliquées. La force critique d'Euler et la force induite sont :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ et } P$$

Avec, comme variables aléatoires, E = module d'élasticité en MPa , I = moment d'inertie de la section en mm^4 , L = longueur en mm et P = force axiale en N .

La contrainte est le rapport d'une force sur une surface.

$$\frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} \text{ et } \frac{P}{A}$$

Avec A = l'aire en mm^2 ,

L'équation linéaire de la fonction d'état limite g_1 peut donc s'écrire :

$$g_1(P, E, A, I, L) = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} - \frac{P}{A}$$

Toutes les variables suivent une distribution normale. Les valeurs des moyennes et des écarts types des variables sont les suivantes :

$$(\mu_P, \sigma_P) = (260000, 26000)$$

$$(\mu_A, \sigma_A) = (2280, 228)$$

$$(\mu_I, \sigma_I) = (5.6 * 10^6, 0.56 * 10^6)$$

$$(\mu_L, \sigma_L) = (5000, 500)$$

$$(\mu_E, \sigma_E) = (200000, 20000)$$

La valeur moyenne de la fonction d'état limite est donnée par :

$$\mu_{g_1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = \frac{3.1416^2 * 200000 * 5.12 * 10^6}{5000^2 * 2060} - \frac{260000}{2060}$$

$$\mu_{g_1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = 79.894 MPa$$

Les dérivés partiels de g_1 par rapport aux variables aléatoires évaluées à la valeur moyenne se calculent une à une pour chaque variable.

$$\frac{d}{d\mu_P} \mu_{g_1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = -\frac{1}{\mu_A} = -\frac{1}{2280}$$

$$\frac{d}{d\mu_P} \mu_{g_1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = -0.0004386$$

$$\frac{d}{d\mu_E} \mu_{g_1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = \frac{\pi^2 \mu_I}{\mu_L^2 \mu_A} = \frac{3.1416^2 * 5.6 * 10^6}{5000^2 * 2280}$$

$$\frac{d}{d\mu_E} \mu_{g_1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = 0.0009696$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu_A}\mu_{g1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) &= -\frac{\pi^2\mu_E\mu_I}{\mu_L^2\mu_A^2} + \frac{\mu_P}{\mu_A^2} \\ &= -\frac{3.1416^2 * 200000 * 5.6 * 10^6}{5000^2 * 2280^2} + \frac{260000}{2280^2}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\mu_A}\mu_{g1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = -0.035$$

$$\frac{d}{d\mu_I}\mu_{g1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = \frac{\pi^2\mu_E}{\mu_L^2\mu_A} = \frac{3.1416^2 * 200000}{5000^2 * 2280}$$

$$\frac{d}{d\mu_I}\mu_{g1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = 0.0000346$$

$$\frac{d}{d\mu_L}\mu_{g1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = -\frac{2\pi^2\mu_E\mu_I}{\mu_L^3\mu_A} = -\frac{2 * 3.1416^2 * 200000 * 5.6 * 10^6}{5000^3 * 2280}$$

$$\frac{d}{d\mu_L}\mu_{g1}(\mu_P, \mu_E, \mu_A, \mu_I, \mu_L) = -0.077572$$

L'écart type de la fonction d'état limite peut se calculer par :

$$Variance(g) = \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \sigma_{x_i}^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{g1}^2 &= (-0.0004386)^2 * (26000)^2 + (0.0009696)^2 * (20000)^2 \\ &+ (-0.035)^2 * (228)^2 + (0.0000346)^2 * (0.56 * 10^6)^2 \\ &+ (-0.077572)^2 * (5000)^2\end{aligned}$$

$$\sigma_{g1}^2 = 2450.38$$

$$\sigma_{g1} = \sqrt{\sigma_{g1}^2} = \sqrt{2450.38} = 49.501 \text{ MPa}$$

L'indice de fiabilité, β_1 , correspondant à la fonction d'état limite g_1 est donné par :

$$\beta_1 = \frac{\mu_{g1}}{\sigma_{g1}} = \frac{79.894}{49.401} = 1.614$$

La fiabilité est calculée par

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\beta_1=1.614}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 5.327 \%$$

On procède de la même manière pour chacune des barres du treillis. La sollicitation correspond à l'effort interne de la barre sous l'effet des charges appliquées. C'est la moyenne de la charge qui est listée dans le tableau 7 ainsi que la moyenne de l'inertie, de l'aire et de la longueur. L'écart type de ces variables aléatoires est de 10% de ces moyennes.

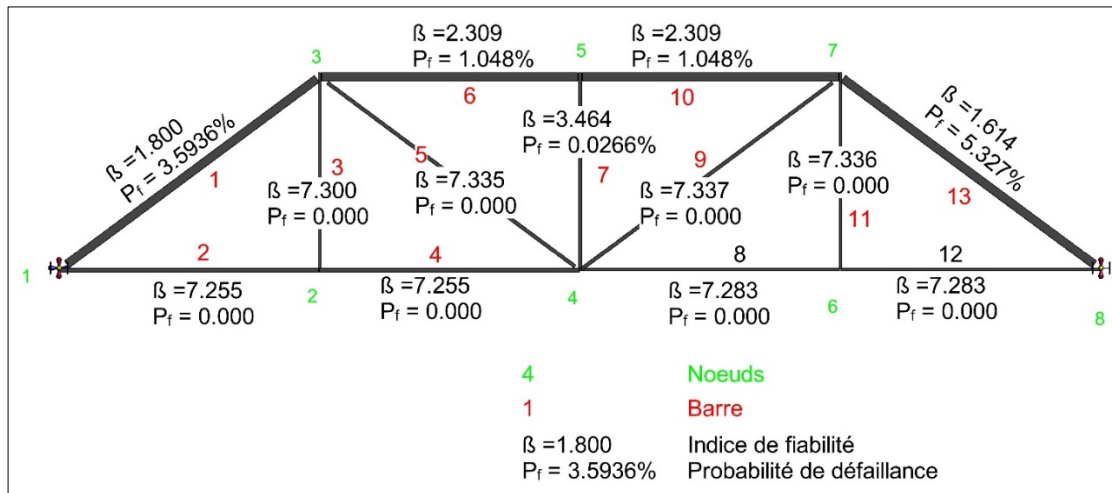


Figure 39 : Fiabilité des barres du treillis

L'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance sous l'état limite de flambage des 13 barres du treillis porteur du pont sont indiquées dans la figure 39. Les membrures de la corde supérieure : 1, 6, 10 et 13 sont sollicitées en compression et leur probabilité de rupture est la plus significative. Une différence non négligeable de la fiabilité est constatée lorsque la longueur de la barre augmente. Pour les membrures en tension, l'indice de fiabilité est supérieur à 7.0 et la probabilité de rupture est nulle.

Dans ce chapitre, les fermes supportant la travée d'un pont ont été traitées par la méthode déterministe et la méthode probabiliste pour généraliser la méthode de l'analyse de fiabilité des structures. Les résultats sont conformes aux attentes. Dans la prochaine section, il convient de conclure cette étude.

CHAPITRE 6. CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

6.1 Accomplissement

À travers ce travail, concentré sur les structures de treillis, sont présentés un aperçu général des dernières avancées en matière d'analyse de fiabilité structurelle et la comparaison de la conception basée sur la méthode déterministe et celle basée sur les méthodes probabilistes. Les méthodes de propagation des incertitudes, de modélisation de la fiabilité, d'évaluation de la fiabilité, d'analyse de sensibilité et de fiabilité basée sur la fiabilité sont abordées. Les méthodes d'analyse de fiabilité vont au-delà des problèmes d'incertitude aléatoire.

Ce travail vise à contribuer aux développements des méthodes de conception fiabiliste des structures de treillis. Un treillis à trois barres et par la suite la structure d'un pont ont été calculé par la méthode déterministe et la méthode probabiliste.

6.2 Limites de la méthode proposée

La méthode probabiliste de l'analyse de fiabilité des structures connaît des limites assez embêtantes.

L'absence d'une frontière entre la méthode déterministe et la méthode probabiliste empêche d'avoir une comparaison incontestable entre ces deux procédures de calcul. Connaissant déjà les sections usuelles privilégiées pour des constructions par la méthode déterministe, il aura été pratique de pouvoir comparer ces méthodes pour en garder le meilleur des deux; mais ce sont deux méthodes empruntant deux directions distinctes.

Il est indispensable d'entamer une analyse de fiabilité, lorsqu'il s'agit d'une structure robuste, sans procéder à une analyse par la méthode des éléments

finis. La longueur du temps de calcul des modèles numériques est amplifiée par le grand nombre d'appels à ces modèles. L'estimation de la fiabilité peut nécessiter des méthodes statistiques sophistiquées et des moyens de calcul important.

Il est à noter enfin que les tables de taux de défaillance ne représentent généralement qu'une approximation grossière de la réalité et que le calcul des contraintes résistances demeure des expertises très pointues et en constante évolution que le concepteur doit aborder avec une extrême prudence

6.3 Recommandations

La méthode d'analyse fiabiliste des structures a prouvé son efficacité. Le concepteur peut désormais choisir entre le traitement en parallèle ou la réduction du modèle pour traiter de manière efficace les problèmes lourds de fiabilité. Les techniques de réduction de modèle sont à prioriser pour les problèmes comportant un grand nombre d'aléas.

La prise en compte de la contribution des barres d'armature dans les modèles en éléments finis de béton donnera beaucoup de perspective à la méthode probabiliste. Toutes ces perspectives demanderont une évolution du code fiabiliste.

Une étape ultérieure à envisager est la conception de structure complètement fondée sur l'approche probabiliste sans coefficient de sécurité ni valeurs caractéristiques.

L'avenir des méthodes probabilistes passe par l'analyse des différents modes de défaillance sous des sollicitations statiques et dynamiques. L'étude fiabiliste, pour différents géométries et paramètres, peut être plus adaptée aux bâtiments, ponts et structures industriels.

RÉFÉRENCES

- [1] S. Kadry and A. Chateaneuf, "Probabilistic Transformation Method in Reliability Analysis," vol. 31, pp. 135-148, 2007.
- [2] Z. El Haddad, O. Bendaou, and L. El Bakkali, "Technique propose pour évaluer la réponse mécanique stochastique fondée sur la transformation avec MEF," in *12ème congrès de Mécanique Casablanca (Maroc)*, 2015, pp. 21-24.
- [3] S. Moaveni, *Finite element analysis : theory and application with ANSYS*. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [4] R. E. Melchers and A. T. Beck, Wiley, Ed. *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Third ed. 2018.
- [5] (2020, 10 mai 2020). *Polytechnique Montréal Programme Baccalauréat en Génie Civil* Available: <https://www.polymtl.ca/futur/civil>
- [6] (2020, 10 mai 2020). *McGill University Undergraduate Programs*. Available: <https://www.mcgill.ca/engineering/students/undergraduate/undergraduate-programs>
- [7] A. Lannoy, M. Lemaire, and A. Delage, *La Fiabilité en mécanique Des méthodes aux applications*. Presses des Mines, 2018.
- [8] M. Holicky, S. press, Ed. *Reliability analysis for structural design*. Sun Press, 2009.
- [9] D. E. Allen, "Calcul aux états limites," *Conseil national de recherches du Canada. Institut de recherche en construction du CNRC*, 1982.
- [10] G. Turkalj, J. Brnic, and S. Kravanja, "A beam model for large displacement analysis of flexibly connected thin-walled beam-type structures," (in eng), *Thin-Walled Structures*, vol. 49, no. 8, pp. 1007-1016, 2011 2011.
- [11] J. Lindner, "Design of steel beams and beam columns," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 19, no. 5, pp. 378-384, 1997 1997.
- [12] W.-F. Liu and W. M. Bulleit, "Approximate reliability analysis of wood structural systems," (in eng), *Structural Safety*, vol. 17, no. 2, pp. 59-78, 1995 1995.
- [13] T. Toratti, S. Schnabl, and G. Turk, "Reliability analysis of a glulam beam," (in eng), *Structural Safety*, vol. 29, no. 4, pp. 279-293, 2007 2007.
- [14] K. Frydryšek, "Reliability analysis of beam on elastic nonlinear foundation," (in eng), *Applied and Computational Mechanics*, vol. 1, no. 2, pp. 445-452, 2007 2007.
- [15] F. Arash Mohammadi and K. Behrooz, "Reliability Analysis of Corroded Reinforced Concrete Beams Using Enhanced HL-RF Method," (in eng), *Civil Engineering Infrastructures Journal*, vol. 48, no. 2, pp. 297-304, 2015 2015.

- [16] Z. Kala, "Global sensitivity analysis of reliability of structural bridge system," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 194, pp. 36-45, 20190901 2019.
- [17] A. Kawano and A. Zine, "Reliability evaluation of continuous beam structures using data concerning the displacement of points in a small region," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 180, pp. 379-387, 20190201 2019.
- [18] J. Qin, "Information-dependent seismic reliability assessment of bridge networks based on a correlation model," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 176, pp. 314-323, 20181201 2018.
- [19] R. A. Sanabria Díaz, S. J. Sarmiento Nova, M. C. A. Teixeira Da Silva, L. Mouta Trautwein, and L. C. de Almeida, "Reliability analysis of shear strength of reinforced concrete deep beams using NLFEA," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 203, 20200115 2020.
- [20] Q. Wang *et al.*, "Machine learning aided static structural reliability analysis for functionally graded frame structures," (in eng), *Applied Mathematical Modelling*, vol. 78, pp. 792-815, 202002 2020.
- [21] X. Wang, Q. Shi, W. Fan, R. Wang, and L. Wang, "Comparison of the reliability-based and safety factor methods for structural design," (in eng), *Applied Mathematical Modelling*, vol. 72, pp. 68-84, 201908 2019.
- [22] Z. Xiang, Y. Bao, Z. Tang, and H. Li, "Deep reinforcement learning-based sampling method for structural reliability assessment," (in eng), *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 199, 202007 2020.
- [23] M. A. Zanini, L. Hofer, and K. Toska, "A semi-analytical formulation for accounting uncertainties of hazard parameters in structural seismic reliability analysis," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 192, pp. 18-29, 20190801 2019.
- [24] G. Yao and Y. Zhang, "Reliability and sensitivity analysis of an axially moving beam," (in eng), *Meccanica*, vol. 51, no. 3, pp. 491-499, 201603 2016.
- [25] K. Nasrollahzadeh and R. Aghamohammadi, "Reliability analysis of shear strength provisions for FRP-reinforced concrete beams," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 176, pp. 785-800, 20181201 2018.
- [26] D.-C. Feng, S.-C. Xie, J. Xu, and K. Qian, "Robustness quantification of reinforced concrete structures subjected to progressive collapse via the probability density evolution method," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 202, 20200101 2020.
- [27] M. Barros, E. Cavaco, L. Neves, and E. Júlio, "Effect of non-structural masonry brick infill walls on the robustness of a RC framed building severely damaged due to a landslide," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 180, pp. 274-283, 20190201 2019.
- [28] M. A. Mendoza-Lugo, D. J. Delgado-Hernández, and O. Morales-Nápoles, "Reliability analysis of reinforced concrete vehicle bridges columns using non-

- parametric Bayesian networks," (in eng), *Engineering Structures*, vol. 188, pp. 178-187, 20190601 2019.
- [29] S. S. Rao, *Reliability Engineering*. Pearson, 2014.
 - [30] R. Singh, "Reliability Analysis of Statically Indeterminate Beams Designed with Moment Redistribution," Master of Science, George Washington University, 2016.
 - [31] W. Ghie, "Notes de cours : GEN4234-Fiabilité et maintenance," ed. Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue: UQAT, 2018.
 - [32] S. Kadry, "Couplage elements finis et méthode de transformation probabiliste," Docteur d'Université, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2007.